九州大学工学部平成16年度編入学試験問題 物理

1　問題

水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸をとった xy 平面を内で、質量 m の物体を諸速度 v_0、仰角 θ で原点から投射する。放物体には運動量に比例した空地の抵抗力が働くものとする。重力加速度を g、抵抗の比例係数を $k > 0$ として以下の問いに答えよ。

1. 運動方程式を x, y 成分に分けて書け。
2. 時刻 t における放物体の速度 (v_x, v_y) と位置 (x, y) を求めよ。
3. 終速度は初速度の大きさや向きに無関係であることを示せ。
4. 放物体の軌跡を示せ。

1.1

運動方程式は以下のようになる。

$$x\text{ 成分} : m\ddot{x} = -km\dot{x} \tag{1.1}$$

$$y\text{ 成分} : m\ddot{y} = -km\dot{y} - mg \tag{1.2}$$

1.2

初速度を (v_{x0}, v_{y0}) と表し、初期位置を (x_0, y_0) とする。

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta \tag{1.3}$$

$$v_{y0} = v_0 \sin\theta \tag{1.4}$$

$$x_0 = 0 \tag{1.5}$$

$$y_0 = 0 \tag{1.6}$$

x の方程式について、$v_x = \dot{x}$ より v_x で表す。

$$m\dot{v}_x + kmv_x = 0 \tag{1.7}$$

積分定数を C として解は、

$$v_x(t) = C\mathrm{e}^{-kt} \tag{1.8}$$

である。初期条件を代入して $C = v_{x0}$ より解は、

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta \mathrm{e}^{-kt} \tag{1.9}$$

となる。

また位置 x は、積分定数を C_2 として、

$$\begin{aligned} x &= \int v_x dx \\ &= -\frac{v_0}{k}\cos\theta \mathrm{e}^{-kt} + C_2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

となる。初期条件より、$C_2 = \dfrac{v_0}{k}\cos\theta$ であり、

$$x(t) = \frac{v_0}{k}\cos\theta(1 - \mathrm{e}^{-kt}) \tag{1.11}$$

となる。

y についても同様に求める。

$$m\dot{v}_y + km(v_y + \frac{g}{k}) = 0 \tag{1.12}$$

積分定数を C_3 として、解は

$$v_y = C_3\mathrm{e}^{-kt} - \frac{g}{k} \tag{1.13}$$

となる。初期条件から、$C_3 = v_{y0} + \dfrac{g}{k}$ となり、解は次のようになる。

$$v_y(t) = (v_0 \sin\theta + \frac{g}{k})\mathrm{e}^{-kt} - \frac{g}{k} \tag{1.14}$$

位置 y は、積分定数を C_4 として、

$$\begin{aligned} y(t) &= \int v_y dt \\ &= -\frac{1}{k}(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k})\mathrm{e}^{-kt} - \frac{g}{k}t + C_4 \end{aligned} \tag{1.15}$$

となる。初期条件から $C_4 = \dfrac{1}{k}(v_0 \sin\theta + \dfrac{g}{k})$ より、解は次のようになる。

$$y(t) = \frac{1}{k}(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k})(1 - \mathrm{e}^{-kt}) - \frac{g}{k}t \tag{1.16}$$

1.3

$v_x(\infty), v_y(\infty)$ を求める。

$$\lim_{t\to\infty} v_x(t) = 0 \tag{1.17}$$

$$\lim_{t\to\infty} v_y(t) = -\frac{g}{k} \tag{1.18}$$

従って、終速度は鉛直下向きで抵抗係数と重力加速度にのみ依存することが分かる。

1.4

x 方向の変位を求めると、

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{v_0}{k}\cos\theta \tag{1.19}$$

となり、この値に収束することが分かる。

2 問題

1mol の理想気体について考える。気体定数を R、比熱比を γ とする。気体の変化過程は次のようなものであるとする。

過程	状態
A → B	等温加熱 T_2
B → C	断熱圧縮
C → D	等温冷却 T_1
D → A	断熱膨張

また、各状態値は体積 V、圧力 P に添え字をつけて表す。

1. 気体が外部にする仕事 W_{AB} と気体が吸収する熱量 Q_2 を求めよ。
2. B → C において、気体が行う仕事を W_{BC} を $\gamma, p_B, p_C, v_B, v_C$ を使って表せ。また γ, R, T_1, T_2 を用いて表せ。
3. C → D の過程の仕事 W_{CD} と放出する熱量 Q_1 を求めよ。
4. D → A の過程の仕事 W_{DA} を求めよ。
5. 一回のサイクルで、気体が外部に行う仕事 W を求めよ。
6. このサイクルの熱効率を求めよ。

2.1

仕事 W_{AB}[J]

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B pdV \\ &= \int_A^B \frac{RT_2}{V}dV \\ &= RT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}[\mathrm{J}] \end{aligned} \tag{2.1}$$

熱 Q_{AB}[J]
第一法則から、

$$\delta Q = dU + pdV \tag{2.2}$$

である。理想気体では $U \equiv U(t)$ であるので、等温過程では $dU = 0$ となる。したがって、熱量は次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta Q &= pdV \\ Q_2 &= \int_A^B dQ \\ &= \int_A^B pdV \\ &= RT \ln \frac{V_A}{V_B}[\mathrm{J}] \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.2

第一法則から、

$$\delta Q = dU + pdV \tag{2.4}$$

である。断熱過程であるから、$\delta Q = 0$ であり、

$$pdV = -dU \tag{2.5}$$

が成立する。したがって、仕事 W_{BC} は内部エネルギー U_B, U_C を用いて表される。

$$\begin{aligned} W_{BC} &= \int_B^C pdV \\ &= -\int_B^C dU \\ &= U_B - U_C \end{aligned} \tag{2.6}$$

一方、比熱比 γ とマイヤーの関係式は

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \tag{2.7}$$

$$R = C_p - C_v \tag{2.8}$$

である。ただし、C_p, C_v はそれぞれ定圧比熱と定積比熱を表す。また、これらは次のように表される。

$$C_p = \frac{dQ}{dT} = \frac{dH - Vdp}{dT} = \frac{dH}{dT} \tag{2.9}$$

$$C_v = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU + pdV}{dT} = \frac{dU}{dT} \tag{2.10}$$

$$\tag{2.11}$$

H はエンタルピを表す。
以上より、仕事 W_{BC} は

$$\begin{aligned} W_{BC} &= CvdT \\ &= C_v(T_2 - T_1) \end{aligned} \tag{2.12}$$

となる。

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1} \tag{2.13}$$

$$pV = RT \tag{2.14}$$

で書き換えると、

$$
\begin{aligned}
W_{BC} &= \frac{R}{\gamma-1}(T_2 - T_1) \\
&= \frac{R}{\gamma-1}\left(\frac{p_B V_B}{R} - \frac{p_C V_C}{R}\right) \\
&= \frac{1}{\gamma-1}(p_B V_B - p_C V_C) \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

2.3

等温過程であるから、

$$
\begin{aligned}
W_{CD} &= RT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} \\
&= -Q_1 \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

となる。

2.4

$$
\begin{aligned}
W_{DA} &= \frac{1}{\gamma-1}(p_D V_D - p_A V_A) \\
&= \frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_2) \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

2.5

このサイクル一回で気体が外部に行う仕事は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
W &= W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} \\
&= W_{AB} + W_{CD} \\
&= R\left\{T_2 \ln \frac{V_B}{V_A} - T_1 \ln \frac{V_C}{V_D}\right\} \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

2.6

$$
\begin{aligned}
\eta &= \frac{L}{Q_H} \\
& \frac{Q_H - Q_L}{Q_H} \\
&= 1 - \frac{Q_L}{Q_H} \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

これを T_1, T_2 で表すと

$$
\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \qquad (2.20)
$$

3 問題

3.1

2 つの小孔 H_1, H_2 をもつ板に垂直に左から入射速度 v の電子線 (電子の質量 m、電荷 $-e$) を照射する。

このとき、H_1 を通過した電子は磁場 B から大きさ、

$$evB[\mathrm{N}] \tag{3.1}$$

の力を受ける。円を描くためには、電子に向心力が働く必要がある。磁束密度によるローレンツ力は、

$$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{3.2}$$

であるから、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は紙面の表から裏に向かって生じている。

H_1, H_2 の距離を L とし、入射電子が H_2 を通るための磁束密度を考える。電子にはも遠心力 f が働く。

$$f = m\frac{L}{2}\omega^2 \tag{3.3}$$

電子は速度 $\boldsymbol{v}$ で動くから、

$$\omega = \frac{v}{L/2} = \frac{2v}{L} \tag{3.4}$$

と表せる。よって働く遠心力は

$$\begin{aligned} f &= m\frac{L}{2}\omega^2 \\ &= \frac{2mv^2}{L} \end{aligned} \tag{3.5}$$

となる。これがローレンツ力と等しいときに円運動となるので、

$$\begin{aligned} \frac{2mv^2}{L} &= evB \\ &\rightarrow \quad B = \frac{2mv}{eL} \end{aligned} \tag{3.6}$$

の磁束密度をかければよい。

3.2

金属には、光や紫外線を当てると電子が飛び出す現象が観測される。この現象を**光電効果**と呼ぶ。この現象は光が**粒子的性質**を持つことを示しており、干渉、回折などの**波動的性質**では説明できない。入射する光の振動数を ν、金属の仕事関数を W としたとき、放出される電子の最大運動エネルギー K_M は

$$K_M = h\nu - W \tag{3.7}$$

である。電子を放出させるのに必要な入射光の最小振動数 ν_0 は

$$\begin{aligned} K_M = 0 = h\nu_0 - W \\ \rightarrow \quad \nu_0 = \frac{W}{h} \end{aligned} \tag{3.8}$$

となる。また、単位時間に放出される電子の数は、入射光の強度に比例する。

3.3

水素原子中で質量の m の電子が半径 r の円軌道を速さ v で運動している。電子波の波長 λ は

$$\lambda = \frac{h}{mv} \tag{3.9}$$

である。電子が水素原子核の周りを 1 周したときに、電子波が n かい振動して元と同じ位相に戻るための条件は、

$$2\pi mvr = nh \tag{3.10}$$

と書ける。水素原子が、エネルギー順位 E_2 の定常状態からより低い E_1 の定常状態に遷移するときに放出される光子のエネルギー $\triangle E$ は

$$\triangle E = E_2 - E_1 \tag{3.11}$$

となる。逆に、E_1 の定常状態にある水素原子は波長

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2(E_2 - E_1)}} \tag{3.12}$$

の光子を吸収して E_2 の定常状態に遷移する。