# 九州大学工学部平成15年度編入学試験問題 物理

## 1 問題

図のような滑らかな水平面と斜面がなだらかに続いている。斜面の角度は 60 °で頂点 A の高さは h である。水平面の端にバネ定数 $k$ のの軽いバネをつけ、他端に質量 $m$ の小球を置く。重力加速度を $g$ とする。

バネを $x$ だけ縮めて離すと、小球は A 点まで登って引き返した。

### 1.1 エネルギーの保存から $x$ を求める

バネの弾性エネルギーは $frac12kx^2$、A 点での小球のポテンシャルエネルギーは $mgh$ である。この両者が等しいから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}kx^2 &= mgh \\ x &= \sqrt{\frac{2mgh}{k}}[m] \qquad (1.1) \end{aligned}$$

となる。

### 1.2 小球の鉛直方向の運動

バネを縮める長さを $x'(> x)$ とすると、小球は速さ $v$ で A 点を飛び出した。このときの小球の運動を考える。小球の運動エネルギーは、$\frac{1}{2}mv^2$ であり、エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}k'x^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2 \qquad (1.2)$$

が成り立つ。小球の速さ $v$ は、

$$v = \sqrt{\frac{kx'^2}{m} - 2gh}[\mathrm{m/s}] \qquad (1.3)$$

となる。

小球は鉛直方向の速度 $v_y$

$$v_y = v\sin 60\ ^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v \qquad (1.4)$$

の大きさを持つ。飛び出した後の小球の $y$ 方向の運動方程式は、

$$m\ddot{y} = -mg \qquad (1.5)$$

であるので、

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -gt + C_1 \qquad (1.6) \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \qquad (1.7) \\ & \qquad (1.8) \end{aligned}$$

となる。ただし、$C_1, C_2$ は積分定数である。$\dot{y}(0) = v_y, y(0) = 0$ として、

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}vt \qquad (1.9)$$

$$\dot{y} = -gt + \frac{\sqrt{3}}{2}v \qquad (1.10)$$

となる。小球の到達点は、$\dot{y} = 0$ の時で、

$$\begin{aligned} t_{top} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v}{g} \qquad (1.11) \\ y(t_top) &= -\frac{1}{2}g \cdot \frac{3}{4}\frac{v^2}{g^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}v \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v}{g} \\ &= -\frac{3v^2}{8g} + \frac{3v^2}{4g} \\ &= \frac{3v^2}{8g} \qquad (1.12) \end{aligned}$$

となる。したがって、全体の高さ $h'$ は、

$$h' = h + \frac{3v^2}{8g} \qquad (1.13)$$

となる。

容積が可変の容器の中における気体の状態について次の問いに答えよ。

## 1.3

最初、容器の気体の体積を $V$ とし、圧力 $P$ の状態から温度を一定 $T$ に保ちながら、ゆっくりと圧縮し、体積が最初の $\frac{1}{3}$ になった。なお、モル数を $n$ 気体定数を $R$ で表すものとする。

### 1.3.1 最後の状態の圧力はいくらか

気体の状態方程式から、最後の圧力を $P'$ として、

$$PV = P'\left(\frac{1}{3}V\right) = nRT \tag{1.14}$$

が成り立つ。したがって、

$$P' = \frac{3nRT}{V} = 3P \tag{1.15}$$

となる。

### 1.3.2 この体積変化になした仕事はいくらか。

仕事 $W$ は、

$$\begin{aligned} W &= \int_1^2 PdV \\ &= \int_1^2 \frac{nRT}{V}dV \\ &= nRT\ln\frac{V_2}{V_1} \end{aligned} \tag{1.16}$$

となる。$V_1 = V, V_2 = frac13V$ を表すので、

$$\begin{aligned} W &= nRT\ln\frac{\frac{1}{3}V}{V} \\ &= -nRT\ln 3 \end{aligned} \tag{1.17}$$

となる。これは、気体が外部になす仕事であるから、期待が行われた仕事 $W'$ は、

$$W' = nRT\ln 3 \tag{1.18}$$

となる。

## 1.4

気体 A は短原子分子で比熱比が $\gamma = \frac{5}{3}$ であり、気体 B は 2 原子分子で比熱比が $\gamma = \frac{7}{5}$ である。最初、A 気体と B 気体の体積 $V$、圧力 $P$、温度 $T$ が等しい状態から、体積が最小の $\frac{1}{3}$ になるまで断熱的に圧縮した。

### 1.4.1 気体がした仕事の比 $(W_A/W_B)$ はいくらか

仕事の一般形を求める。

$$\delta Q = dU + PdV \tag{1.19}$$

$$\tag{1.20}$$

断熱過程であるから $\delta Q = 0$ であり、

$$\begin{aligned} W &= \int PdV = -\int dU \\ &= -C_v\int dT \end{aligned} \tag{1.21}$$

となる。$C_v$ は定積比熱を表し、

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \tag{1.22}$$

$$C_P - C_V = nR \tag{1.23}$$

を用いて、

$$C_v = \frac{nR}{\gamma - 1} \tag{1.24}$$

と表される。したがって、仕事は

$$\begin{aligned} W &= -\frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1) \\ &= \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_2) \\ &= \frac{1}{\gamma-1}(P_1V_1 - P_2V_2) \end{aligned} \tag{1.25}$$

となる。1 は変化前、2 は変化後を表す。

一方断熱変化であるから、

$$PV^\gamma = Const. \tag{1.26}$$

が成り立つ。容器 A の比熱比を $\gamma_A$、変化後の圧力を $P_A$、容器 B 比熱比を $\gamma_B$、変化後の圧力を $P_B$ とすると、

$$\begin{aligned} PV^{\gamma_A} &= P_A\left(\frac{1}{3}V\right)^{\gamma_A} \\ P_A &= \frac{PV^{\gamma_A}}{(\frac{1}{3}V)} = 3^{\gamma_A}P \end{aligned} \tag{1.27}$$

となる。同様に、

$$P_B = 3^{\gamma_B}P \tag{1.28}$$

となる。

以上より仕事は、

$$\begin{aligned} W_A &= \frac{1}{\gamma_A - 1}(PV - P_A V_A) \\ &= \frac{1}{\gamma_A - 1}(PV - 3^{\gamma_A} P \cdot \frac{1}{3} V) \\ &= \frac{PV}{\gamma_A - 1}(1 - 3^{\gamma_A - 1}) \quad (1.29) \\ W_B &= \frac{PV}{\gamma_B - 1}(1 - 3^{\gamma_B - 1}) \quad (1.30) \end{aligned}$$

となる。比を取ると、

$$\begin{aligned} \frac{W_A}{W_B} &= \frac{1 - 3^{\gamma_A - 1}}{1 - 3^{\gamma_B - 1}} \cdot \frac{\gamma_B - 1}{\gamma_A - 1} \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{1 - 3^{\frac{2}{3}}}{1 - 3^{\frac{2}{3}}} \quad (1.31) \end{aligned}$$

となる。

### 1.4.2 最後の状態における圧力比 $(P_A/P_B)$ はいくらか

$$P_A = 3^{\gamma_A} P \quad (1.32)$$
$$P_B = 3^{\gamma_B} P \quad (1.33)$$

より、

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{3^{\gamma_A}}{3^{\gamma_B}} = \frac{3^{\frac{5}{3}}}{3^{\frac{7}{3}}} = 3^{\frac{4}{15}} \quad (1.34)$$

となる。

### 1.4.3 最後の状態における温度の比 $(T_A/T_B)$ はいくらか

$PV = nRT$ より、

$$\begin{aligned} T_A &= \frac{P_A V_A}{nR} = \frac{V}{3nR} 3^{\gamma_A} P \quad (1.35) \\ T_B &= \frac{V}{3nR} 3^{\gamma_B} P \quad (1.36) \end{aligned}$$

となる。よって、温度の比は

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{3^{\gamma_A}}{3^{\gamma_B}} = \frac{3^{\frac{5}{3}}}{3^{\frac{7}{3}}} = 3^{\frac{4}{15}} \quad (1.37)$$

# 2 問題

図のような、抵抗 $R$、コンデンサ $C$、コイル $L$ および、電池 $E$ を含んだ回路がある。$R = 100[\Omega], C = 100[\mu F], L = 1[H], E = 100[V]$

## 2.1

はじめに、コンデンサに電荷はなく、スイッチ s1 と s2 は開いていた。まずスイッチ s1 を閉じた。

今点差の電荷を $q$、電流を $i = \dfrac{dq}{dt}$ 、電圧を $v = \dfrac{1}{c}\int idt$ とし、回路方程式を立てる。

$$Ri + \frac{1}{c}\int idt = E \tag{2.1}$$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = E \tag{2.2}$$

初期条件は、

$$q(0) = 0 \tag{2.3}$$

である。解は、積分定数を $K$ として、

$$g(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t} + CE \tag{2.4}$$

となる。初期条件から、

$$K = -CE \tag{2.5}$$

となり解は次のようになる。

$$q(t) = CE(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) \tag{2.6}$$

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} \tag{2.7}$$

$$v(t) = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) \tag{2.8}$$

$RC = 10^{-2}, CE = 10^{-2}$ より、

$$i(t) = e^{-100t} \tag{2.9}$$

$$v(t) = 100(1 - e^{-100t}) \tag{2.10}$$

となる。

## 2.2

スイッチ s1 を閉じて十分に時間がたった後スイッチを s1 を開きスイッチ s2 を閉じた。

この場合の回路方程式は、

$$\frac{1}{C}\int idt + L\frac{di}{dt} = 0 \tag{2.11}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0 \tag{2.12}$$

となる。初期条件は、2.1 より、

$$i(0) = 0 \tag{2.13}$$

$$v(0) = -E \tag{2.14}$$

$$q(0) = -CE \tag{2.15}$$

である。解は、積分定数を $A, B$ として、以下のようになる。

$$q(t) = A\sin\frac{t}{\sqrt{LC}} + B\cos\frac{t}{\sqrt{LC}} \tag{2.16}$$

$$i(t) = \frac{A}{\sqrt{LC}}\cos\frac{t}{\sqrt{LC}} - \frac{B}{\sqrt{LC}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}} \tag{2.17}$$

初期条件から、$A = 0, B = -CE$ であり、解は

$$g(t) = -CE\cos\frac{t}{\sqrt{LC}} \tag{2.18}$$

$$i(t) = \frac{CE}{\sqrt{LC}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}} \tag{2.19}$$

$$v(t) = -E\cos\frac{t}{\sqrt{LC}} \tag{2.20}$$

となる。$CE = 10^{-2}, LC = 10^{-4}$ より、

$$i(t) = \sin 100t \tag{2.21}$$

$$v(t) = -100\cos 100t \tag{2.22}$$

となる。