

九州大学工学部平成 14 年度編入学試験問題 物理

1 問題

図のように、軽い糸 l で吊るされている質量 m の小球を考える。重力加速度を g とする。

1.1 エネルギー保存の観点から

小球を高さ h まで持ち上げたときの位置エネルギー U は次のようになる。

$$U = - \int_0^h (-mg) dx = mgh \quad (1.1)$$

最下点での速度 v_0 はエネルギー保存則から、次のように求められる。

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv_0^2 \\ v_0 &= \sqrt{2gh} \end{aligned} \quad (1.2)$$

右側では、糸の長さが $\frac{1}{2}l$ となるが、系のエネルギーは保存されるので、高さ h' に到達する。

$$\begin{aligned} mgh &= mgh' \\ h' &= h \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.2 線形化した方程式による応答

長さ l の糸、質量 m の矢点からなる振り子の運動方程式は、次のようになる。

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta \quad (1.4)$$

$\sin \theta \approx \theta$ に線形化する。

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\theta \quad (1.5)$$

応答は積分定数を A として、次のようになる。

$$\theta = A \sin(\omega t + \phi) \quad (1.6)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (1.7)$$

したがって小球が左側にある時間 T' は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{T'}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \frac{1}{\omega} \\ &= \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

右側にある時間 T'' は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{T''}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \frac{1}{\omega} \\ &= \pi \sqrt{\frac{l}{2g}} \end{aligned} \quad (1.9)$$

振動全体の周期 T はこれらの和として表される。

$$\begin{aligned} T &= \frac{T'}{2} + \frac{T''}{2} \\ &= \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

2 問題

図において A 、 B はともに容量 C のコンデンサ、 J は抵抗 R の抵抗、電池 E_1 は起電力 V とする。電池 E_2 の起電力は分からないものとする。

2.1 コンデンサの電流と電荷

コンデンサに電荷はなく、スイッチはすべて開いていた。まずスイッチ s_1 を閉じた。 A の電流と電荷を求めよ。

回路方程式

$$Ri + \frac{1}{c} \int i dt = E_1 \quad (2.1)$$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{c} q = E_1 \quad (2.2)$$

解 (積分定数: K)

$$q(t) = ke^{-\frac{1}{RC}t} + CE \quad (2.3)$$

初期条件 $q(0) = 0$ を代入し、積分定数を定める。

$$\begin{aligned} q(0) &= 0 = K + CE \\ K &= -EC \end{aligned} \quad (2.4)$$

特殊解

$$q(t) = CE \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right) \quad (2.5)$$

電流は次のようになる。

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq}{dt} \\ &= \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

スイッチ s_1 を閉じた瞬間に流れる電流は $i(0)$ である。

$$i(0) = \frac{E}{R} \quad (2.7)$$

十分に時間がたってから流れる電流は $i(\infty)$ である。

$$i(\infty) = 0 \quad (2.8)$$

十分に時間がたってからコンデンサに蓄えられる電荷は $q(\infty)$ である。

$$q(\infty) = CE \quad (2.9)$$

2.2 起電力 E_2

スイッチ s_1 を開き、スイッチ s_2, s_3 を閉じてから十分に時間がたってから、調べてみると B には電荷 Q が蓄えられていた。これより、電池 E_2 の起電力 V_2 を求めよ。

A に蓄えられている電荷は、 B に等しいので Q である。したがって、 A, B の電圧は、次のようになる。

$$\frac{Q}{C} + \frac{Q}{C} = V_1 + V_2 \quad (2.10)$$

$$V_2 = \frac{2Q}{C} - E_1 \quad (2.11)$$

2.3 極板間距離と力

コンデンサ B に電荷 Q が蓄えられた状態で、すべてのスイッチを開いた。次に B の極板間距離を d から $2d$ へと増加させた。このとき、極板間にはクーロン力が働いているので、仕事 W を要する。この仕事 W は、作業前後のポテンシャルエネルギーの差に等しい。

容量 C のコンデンサが、電荷 Q を蓄えているときのポテンシャルエネルギー U は次のように表される。

$$U = \frac{Q^2}{2C} \quad (2.12)$$

また幅 d のコンデンサの容量が C であった場合、幅 $2d$ のコンデンサの容量 C' は距離に反比例するので、次のようになる。

$$C' = \frac{C}{2} \quad (2.13)$$

$$(2.14)$$

したがって、ポテンシャルエネルギーの差 ΔU は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{Q^2}{C} - \frac{Q^2}{2C} \\ &= \frac{Q^2}{2C} \end{aligned} \quad (2.15)$$

与えた仕事 W は次のようになる。

$$W = \frac{Q^2}{2C} \quad (2.16)$$

以上より、コンデンサの極板間に働くクーロン力を F と表し、次のように求められる。

$$\begin{aligned} F &= -|\text{grad}(W)| \\ &= -\frac{Q^2}{2C} \cdot \frac{1}{d} \end{aligned} \quad (2.17)$$

3 問題

n モルの理想気体を考える。また、状態の変化過程は次のようなものとする。

A から B	断熱過程
B から C	定積過程
C から D	断熱過程
D から A	定積過程

状態 ABCD の温度をそれぞれ T_A, T_B, T_C, T_D とする。気体の定積モル比熱を C_V とする。

系の状態を変化させたときに、外部から系に加えた熱量 Q 、外部から系に加えた仕事の総量 W 、系の内部エネルギーの増分 ΔU には次の関係が成り立つ。

$$Q = \Delta U + W \quad (3.1)$$

これは、熱に関する基本法則の 1 律であり、熱力学第一法則という。

この関係を用いると、状態 A から A B C D A へと変化させる 1 サイクルの間に、過程 B C で吸収する熱量は、

$$\begin{aligned} \delta Q &= dU + pdV \\ &= dU \\ Q &= nC_V dT \\ &= nC_V(T_C - T_B) \end{aligned} \quad (3.2)$$

過程 D A で系が放出する熱量は、

$$Q = nC_V(T_D - T_A) \quad (3.3)$$

となる。

また過程 A B で外部から系への仕事は、

$$\begin{aligned} \delta Q &= dU + pdV = 0 \\ W &= \int pdV \\ &= - \int dU \\ &= -nC_V(T_B - T_A) \\ W &= nC_V(T_B - T_A) \end{aligned} \quad (3.4)$$

過程 C D で系から外部への仕事は、

$$W = nC_V(T_C - T_B) \quad (3.5)$$

となる。

したがって 1 サイクルの間に系が吸収する熱量に対して、外部への正味仕事の割合を熱機関の効率 η_C とすると、

$$\begin{aligned} \eta_C &= \frac{nC_V(T_C - T_D - T_B - T_A)}{nC_V(T_C - T_B)} \\ &= 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる。