九州大学工学部平成 12 年度編入学試験問題 物理

1 問題

水素原子の電子のエネルギー状態を考える。

気体原子を熱すると、その元素に固有な波長分布を示す光が放射される。これを線スペクトルといい、波長 λ は次式に下がう。

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \tag{1.1}$$

ここで、$n = 1, 2, 3, n' = n + 1$ である。また R はリュードベリ定数と呼ばれ、$R = 1.097 \times 10^7[/\mathrm{m}]$ である。ボー不は、1913 年に次の 2 つの仮定をすることで、式 (1.1) を試論的に導いた。

仮定 1 量子条件
原子内に存在する原子は外からエネルギーをもらわない限り、ある決まった値のエネルギーを持つ状態にとどまる。定常状態のエネルギー値は不連続であって、最低エネルギー状態から数えて、n 番目の定常状態のエネルギー値は次の条件で与えられる。

$$2\pi mvr = nh \tag{1.2}$$

ここで、m は電子の質量、v は原子核の周りを円運動している電子の速さ、r はその円の半径、h はプランク定数である。

仮定 2 振動数条件
呈上状態のエネルギー $E_{n'}$ から低いエネルギー E_n へ移るとき、光のエネルギー $h\nu$ が次式により放出される。

$$h\nu = E_{n'} - E_n \tag{1.3}$$

電子の電荷を $-e$、原子核を $+e$ とすると、求心力 (向心力) はクーロン力とつりあう。

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} &= mr\omega^2 \\ &= m\frac{v^2}{r} \end{aligned} \tag{1.4}$$

ここで、ϵ_0 は誘電率である。式 (1.4) に式 (1.2) を代入する。半径 r として $r = r_1 n^2$ を満たす r_1 をボーアの半径と言う。

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} &= m\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{nh}{2\pi mr}\right)^2 \\ &= \frac{m}{r}\cdot\frac{n^2h^2}{4\pi^2m^2r^2} \\ r &= \frac{\epsilon_0 n^2h^2}{m\pi e^2} \\ r_1 &= \frac{\epsilon_0 h^2}{m\pi e^2} \end{aligned} \tag{1.5}$$

電子のエネルギーは運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ と位置エネルギー $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ で与えられるので、r_1 を用いて、

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{nh}{2\pi mr}\right)^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r} \\ &= \frac{m}{2}\left(\frac{n^2h^2}{4\pi^2m^2}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{m\pi e^2}{\epsilon_0 n^2h^2}\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r_1 n^2} \\ &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon r_1 n^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1 n^2} \\ &= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1 n^2} \end{aligned} \tag{1.6}$$

となる。式 (1.6) を式 (1.3) へ代入すると、

$$\begin{aligned} h\nu &= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1 n'^2} + \frac{e^2}{8\pi\epsilon r_1 n^2} \\ &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \end{aligned} \tag{1.7}$$

を得る。従ってリュードベリ定数は、

$$\begin{aligned} h\frac{c}{\lambda} &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \\ R &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \end{aligned} \tag{1.8}$$

となる。

このように、ボーアは長い間なぞであった原子の線スペクトルの理論的説明に成功したのである。量子条件は、原子の波動性によるものである。また、振動数条件において、光のエネルギーが $h\nu$ で与えられるとしたことは、光の粒子性を表現したものである。光子の運動量 p はプランク定数 h を用いて $p = \frac{h}{\lambda}$ で与えられる。

2 問題

2.1

物質は電気的に性質により直流電流をよく通す導体、ほとんど通さない絶縁体、両者の中間的な性質を持つ半導体の 3 つに大別される。

導体を電界中に置いた際に見られる静電誘導と同様に、絶縁体を電界中に置いた際も表面電荷が生じる。これは、電界が無い場合には、ちょうど打ち消しあうように配列していた正電荷と負電荷の位置が電界によりずれるために生じる静電分極と呼ばれる現象である。このことから絶縁体は誘電体とも呼ばれる。

誘電体を平板コンデンサに入れるとコンデンサの容量が増加する。真空と比べたコンデンサの容量の増加の割合は、比誘電率で与えられる。これ以外にも、平板コンデンサの酔うりょは極板の幅を小さくしたり、面積を大きくしたりすることによって大きくできる。

2.2

極板間が真空であるときの容量が C_0 の平板コンデンサを用意し、その半分を誘電率 $2\epsilon_0$ の物質で満たした。コンデンサの容量を C_0 で表せ。

面積 A、幅 d、誘電率 ϵ のコンデンサの容量は、

$$C = \frac{A}{d}\epsilon \tag{2.1}$$

で表される。従って、

$$C_0 = \frac{A}{d}\epsilon_0 \tag{2.2}$$

がはじめの容量である。

面積を半分にするので、

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{A}{2d}\epsilon_0 \\ &= \frac{C_0}{2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{A}{2d}2\epsilon_0 \\ &= C_0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

となる。全体は、これらのコンデンサ C_1, C_2 の並列接続であるから、

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 \\ &= \frac{3}{2}C_0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

3 問題

図に示すように、角度が異なる 2 つの斜面上で 2 つの物体 A、B がロープおよび滑車を介して連結されている。

物体 A、B の質量をそれぞれ m_1, m_2、斜面 1、2 の角度をそれぞれ θ_1, θ_2 動摩擦係数をそれぞれ、μ_1, μ_2、重力加速度を g とする。

3.1 ロープがたるまずに物体 A,B がともに斜面を滑り降りるとする。このとき物体 A,B の加速度を a、ロープの張力を f として、物体 A,B の運動方程式を求めよ。

物体 A に働く力は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{重力の分力} &: m_1 g \sin\theta_1 \\ \text{動摩擦力} &: -m_1 g \mu_1 \cos\theta_1 \\ \text{ロープの張力} &: f \end{aligned} \tag{3.1}$$

従って、A に対する運動方程式は、

$$m_1 a = m_1 g \sin\theta_1 - m_1 g \mu_1 \cos\theta_1 + f \tag{3.2}$$

となる。同様に、B に対する運動方程式は、

$$m_2 a = m_2 g \sin\theta_2 - m_2 g \mu_2 \cos\theta_2 - f \tag{3.3}$$

となる。

3.2 加速度 a と張力 f を求めよ。

式 (3.1)(3.2) から f を消去すると加速度 a が求められる。

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)a &= m_1 g \sin\theta_1 - m_1 g \mu_1 \cos\theta_1 + m_2 g \sin\theta_2 - m_2 g \mu_2 \cos\theta_2 \\ a &= \frac{1}{m_1 + m_2} \left\{ m_1 g \sin\theta_1 - m_1 g \mu_1 \cos\theta_1 + m_2 g \sin\theta_2 - m_2 g \mu_2 \cos\theta_2 \right\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

張力を求める。

$$\begin{aligned} f &= m_1 a - m_1 g \sin\theta_1 + m_1 g \mu_1 \cos\theta_1 \\ &= \frac{1}{m_1 + m_2} \left\{ m_1^2 g \sin\theta_1 - m_1^2 g \mu_1 \cos\theta_1 + m_1 m_2 g \sin\theta_2 - m_1 m_2 g \mu_2 \cos\theta_2 \right. \\ &\quad \left. - m_1(m_1 + m_2) g \sin\theta_1 + m_1(m_1 + m_2) g \mu_1 \cos\theta_1 \right\} \\ &= \frac{1}{m_1 + m_2} \left\{ m_1 m_2 g \sin\theta_2 - m_1 m_2 g \mu_2 \cos\theta_2 - m_1 m_2 g \sin\theta_2 + m_1 m_2 g \mu_2 \cos\theta_1 \right\} \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \left\{ \sin\theta_2 - \mu_2 \cos\theta_2 - \sin\theta_2 + \mu_1 \cos\theta_1 \right\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.3 ロープがたるまずに物体 A、B 斜面を滑り降りるための条件式を求めよ。

物体 A の加速度 a_A が物体 B の加速度 a_B より大きい場合にロープはたるんでしまう。
それぞれの加速度は、

$$a_A = g \sin\theta_1 - g \mu_1 \cos\theta_1 \tag{3.6}$$

$$a_B = g \sin\theta_2 - g \mu_2 \cos\theta_2 \tag{3.7}$$

である。条件は

$$\begin{aligned} a_A &\leq a_B \\ g\sin\theta_1 - g\mu_1\cos\theta_1 &\leq g\sin\theta_2 - g\mu_2\cos\theta_2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

となる。