九州大学工学部平成 11 年度編入学試験問題 物理

1 熱力学

気体の内部エネルギーは気体内の分子の回転、並進によるエネルギーである。

いっぺん L、ぶんしの質量 m、分子の数 N、速度は xyz 方向だけであるとし、すべてを v と表す。

気体が三方向に対し等方的であるので、各方向の分子の数は

$$\frac{N}{3}[個]$$

である。

分子が 1 つの壁を往復する時間は、

$$\frac{2L}{v}[\mathrm{s}]$$

である。

単位時間に、壁に衝突する分子の数は、

$$\frac{N}{3}/\frac{2L}{v} = \frac{Nv}{6L}[個/\mathrm{s}]$$

である。

1 つの分子について、1 解の衝突で受ける力積は、

$$2mv[\mathrm{Ns}]$$

である。

単位時間に壁が受ける力積は、

$$2mv \times \frac{Nv}{6L} = \frac{mN}{3L}v^2[\mathrm{Ns}]$$

である。

壁が受ける力 F は、

$$\begin{aligned} F \cdot t &= \frac{mN}{3L}v^2 \\ F &= \frac{mN}{3L}v^2[\mathrm{N}] \end{aligned}$$

であり、壁が受ける圧力 p は、

$$p = \frac{mN}{3L^3}v^2[\mathrm{N}/m^2]$$

となる。

気体のもつ内部エネルギーは、気体内の分子の運動エネルギーであるから、

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 \times N \\ &= \frac{N}{2}mv^2[\mathrm{J}] \end{aligned}$$

である。

圧力と内部エネルギーは、

$$p = \frac{2}{3L^2}E[\mathrm{N}/m^2]$$

である。

一方、期待の状態方程式は、

$$pV = nRT[\mathrm{J}]$$

であり、$V = L^3$ で表すと、

$$p = \frac{nRT}{L^3}[\mathrm{N}/m^2]$$

となる。

以上より、気体の内部エネルギーは、

$$\begin{aligned} E &= \frac{3}{2}L^3 p \\ &= \frac{3}{2}nRT[\mathrm{J}] \end{aligned}$$

となり、温度 T に比例する量であると分かる。すなわち、温度は分子の運動の激しさを表している。

2　力学

　鉛直方向にぶら下げたバネ質点系を考える。バネの自然長を L、自然長からの変位を x とする。運動方程式は、

$$m\ddot{x} \quad = \quad -kx + mg$$

となる。

2.1　応答解析

運動方程式を解く。

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx \\ x &= A\sin\omega t + B\cos\omega t \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ m\ddot{X} + kX &= mg \\ X &= \frac{mg}{k} \end{aligned}$$

以上より一般解は、

$$x(t) \quad = \quad A\sin\omega t + B\cos\omega t + \frac{mg}{k}$$

となる。ただし、A, B は積分定数である。
　質点は自然長 $(x = 0)$ から静かに離すものとする。$(\dot{x} = 0)$

$$\begin{aligned} x(0) = 0 = B + \frac{mg}{k} \quad &\rightarrow \quad B = -\frac{mg}{k} \\ \dot{x}(0) = 0 = A\omega = 0 \quad &\rightarrow \quad A = 0 \end{aligned}$$

　解は、

$$x(t) \quad = \quad \frac{mg}{k}(1 - \cos\omega t)$$

となる。
　これは平衡点 $\frac{mg}{k}$ を中心に単振動する解である。

2.2　平衡点からの応答

平衡点が定数であるという観点から、方程式を書き換える。平衡点を、

$$X_{st} = Const$$

とし方程式に代入する。

$$\begin{aligned} 0 &= -kX_{st} + mg \\ X_{st} &= \frac{mg}{k} \end{aligned}$$

となる。
　これは、バネに加えた力 (重力 mg) により伸びる長さである。

　応答を、

$$x = \tilde{x} + X_{st}$$

と表すとすれば、($\tilde{x}$ は平衡点からの変化)

$$m\ddot{\tilde{x}} = -k\tilde{x}$$

となり解は積分定数を A, B として、

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= A\sin\omega t + B\cos\omega t \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

となる。
　$x(0) = 0 = \tilde{x}(0) + X_{st}, \dot{x}(0) = 0 = \dot{\tilde{x}}(0)$ より、

$$\begin{aligned} \tilde{x}(0) = -X_{st} = B \quad &\rightarrow \quad B = -\frac{mg}{k} \\ \dot{\tilde{x}}(0) = A\omega = 0 \quad &\rightarrow \quad A = 0 \end{aligned}$$

となり、解は

$$\tilde{x}(t) = -\frac{mg}{k}\cos\omega t$$

となる。
　もとの解は

$$\begin{aligned} x(t) &= \tilde{x}(t) + X_{st} \\ &= \frac{mg}{k}(1 - \cos\omega t) \end{aligned}$$

2.3　エネルギーからみた解析

応答は、

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{mg}{k}(1 - \cos\omega t) \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

で与えられる。
　最大速度、最大変位を考える。

$$\begin{aligned} x_{max} &= \frac{2mg}{k} \\ \dot{x}_{max} &= \frac{mg}{k}\omega = \sqrt{\frac{m}{k}}g \end{aligned}$$

これをエネルギーで考える。質点が最大変位になった時を x とする。ポテンシャルエネルギーの変化は、

$$mg(x - 0) \quad = \quad mgx[\mathrm{J}]$$

バネのポテンシャルエネルギーの変化は、

$$\frac{1}{2}k(x-0)^2 = \frac{1}{2}kx^2[\mathrm{J}]$$

となる。

保存力以外に力が働かない系なので、エネルギー保存が成り立つ。従って、最大変位は、

$$\begin{aligned} mgx &= \frac{1}{2}kx^2 \\ x &= \frac{2mg}{k}[\mathrm{m}] \end{aligned}$$

となる。

全エネルギーの保存則は、

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgx + \frac{1}{2}kx^2 = 0$$

と表せる。従って、速度は、

$$v = \sqrt{2gx - \frac{k}{m}x^2} \tag{2.1}$$

で与えられる。

v_{max} は、

$$\frac{dv}{dx} = 0 \tag{2.2}$$

となるときの x のときであり、

$$\begin{aligned} 2g - 2\frac{k}{m}x &= 0 \\ x &= \frac{m}{k}g \end{aligned}$$

のときである。

$$\begin{aligned} v = \sqrt{\frac{2m}{k}g^2 - \frac{k}{m}\cdot\frac{m^2}{k^2}g^2} \\ = \sqrt{\frac{m}{k}}g \end{aligned}$$

となる。v_{max} となる x は変位の平衡点である。

3 電磁気学

3.1 磁束

$$\Phi = \int_{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s}$$

3.2 起電力

$$\phi_{emf} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Maxwell 方程式では、

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

と表される。
　起電力は、電場 $\boldsymbol{E}$ のポテンシャルだから、

$$\triangle\phi = \int_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}$$

となる。$(\triangle\phi = \phi_{emf})$
　電場と磁束密度は、

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} &= -\int_{\boldsymbol{S}} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} \\ \int_{\boldsymbol{S}} \mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} &= -\int_{\boldsymbol{S}} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} \\ \to \mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} &= \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

となる。

3.3 ローレンツ力

$\boldsymbol{B}$ 内を速度 $\boldsymbol{v}$ で動く伝家 q に働く力は、

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

である。
　電流 I の場合は、単位長さに働く力

$$\boldsymbol{f} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

が発生する。

3.4 ローレンツ力による減衰

起電力

$$\begin{aligned}\phi_{emf} &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= -Bl\dot{x}\end{aligned}$$

　電流

$$\begin{aligned}I &= \frac{|\phi_{emf}|}{R} \\ &= \frac{Bl}{R}x\end{aligned}$$

　ローレンツ力

$$\begin{aligned}f &= lI \times B \\ &= \frac{B^2l^2}{R}\dot{x}\end{aligned}$$

　運動方程式 (外力 F を加える)

$$m\ddot{x} = -\frac{B^2l^2}{R}\dot{x} + F$$

速度 v について解く。

$$\begin{aligned}m\dot{v} &= -\frac{B^2l^2}{R}v + F \\ v &= C_1 \mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{R}t} + \frac{RF}{B^2l^2}\end{aligned}$$

$v(0) = 0$ とすると、

$$v(t) = \frac{RF}{B^2l^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{R}t}\right)$$

となり、一定の力を加えた場合、速度が減衰していくことが分かる。