平成 18 年度九州大学工学部編入試験問題

December 1, 2005

1　問題

行列 $\boldsymbol{A}$ を以下のように定義する。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{pmatrix}$$

ただし、c は任意実数とする。

1. $|\boldsymbol{A}|$ を求めよ。
2. c のそれぞれの場合の $\boldsymbol{A}$ のランクを求めよ。
3. c のそれぞの場合の $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ。

1.1

式を整理し行列式を計算する。

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & c & c \\ 0 & 1-c^2 & c-c^2 \\ 0 & c-c^2 & 1-c^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & c & c \\ 0 & (1-c)(1+c) & c(1-c) \\ 0 & c(1-c) & (1-c)(1+c) \end{vmatrix} \\
&= (1-c)^2 \begin{vmatrix} 1 & c & c \\ 0 & (1-c) & c \\ 0 & c & (1+c) \end{vmatrix} \\
&= (1-c)^2 \left\{ (1+c)^2 - c^2 \right\} \\
&= (1-c)^2 (1+2c+c^2-c^2) \\
&= (1-c)^2 (1+2c)
\end{aligned}$$

$c = 1, c = -\dfrac{1}{2}$ のときは $\boldsymbol{A}$ は正則でない。

1.2

$c = 1$ の場合

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって rank$\boldsymbol{A}$$=1$ となる。

$c=-\frac{1}{2}$ の場合

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

したがって rank $\boldsymbol{A}=2$ となる。

1.3

$c=1$ の場合
固有方程式は、

$$
\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0
$$

となる。固有方程式を解くと、

$$
\begin{aligned}
(1-\lambda)^3+2-3(1-\lambda) &= 0 \\
1-\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+2-3+3\lambda &= 0 \\
\lambda^2(3-\lambda) &= 0 \\
\left\{ \begin{aligned} \lambda &= 0 \\ \lambda &= 3 \end{aligned} \right.
\end{aligned}
$$

となる。したがって固有値は $\lambda=0, \lambda=3$ となる。
$c=-\frac{1}{2}$ の場合
固有方程式は、

$$
\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0
$$

となる。2 倍して固有方程式を解くと、

$$
\begin{aligned}
(2-2\lambda)^3-2-3(2-2\lambda) &= 0 \\
8-8\lambda^3+24\lambda^2-24\lambda-8+6\lambda &= 0 \\
-8\lambda^3+24\lambda^2+18\lambda &= 0 \\
\lambda(-8\lambda^2+24\lambda-18) &= 0 \\
-2\lambda(4\lambda^2+24\lambda+9) &= 0 \\
\lambda(2\lambda-3)^2 &= 0 \\
\left\{ \begin{aligned} \lambda &= 0 \\ \lambda &= \frac{3}{2} \end{aligned} \right.
\end{aligned}
$$

となる。したがって、固有値は $\lambda=0, \lambda=\frac{3}{2}$ となる。

2　問題

1. $y'' - ay = 0$ の解を求めよ。ただし、a は実数とする。
2. $y'' = -a^2 y$ の解で、$y(0) = 0, y(l) = 0$ を満たす a を求めよ。
3. $y'' + a^2 y = f(x)$ の一般解を求めよ。

2.1

$$y'' - ay = 0$$

$y \propto e^{\lambda x}$ とすると特性方程式は、

$$\lambda^2 = a$$

となる。

$a = 0$ の場合

$$\lambda = 0$$

となり、一般解は、

$$y = Ax + B$$

となる。

$a < 0$ の場合

$$\lambda = \pm\sqrt{a}i$$

となる。したがって一般解は、

$$y = A\sin\sqrt{a}x + B\cos\sqrt{a}x$$

となる。

$a > 0$ の場合

$$\lambda = \pm\sqrt{a}$$

となる。したがって、一般解は、

$$y = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$$

となる。

ただしいずれの場合も A, B は積分定数である。

2.2

$$y'' = -a^2 y$$

の一般解は、積分定数を A, B として

$$y = A\sin ax + B\cos bx$$

となる。

境界条件を代入すると、

$$\begin{array}{ccccc} y(0) & = & B & = & 0 \\ y(l) & = & A\sin al & = & 0 \end{array}$$

となる。$A \neq 0$ となる解の条件は、

$$a = \frac{n\pi}{l}(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

である。考えうるすべての n に関しての和が解となりえるから、解は

$$y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

となる。ただし、A_n は n により異なる積分定数である。

2.3

$$y'' + a^2 y = f(x)$$

同次解を y_1, y_2 とすると

$$\begin{aligned} y_1 &= \sin ax \\ y_2 &= \cos ax \end{aligned}$$

となる。

解が、x の関数 u_1, u_2 を用いて、む

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

と仮定すると、u_1, u_2 は次式を満たす。

$$\begin{pmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

u_1, u_2 について解くと、

$$u_1 = \int \frac{f(x) y_2}{y_1' y_2 - y_1 y_2'} dx$$

$$u_2 = -\int \frac{f(x) y_1}{y_1' y_2 - y_1 y_2'} dx$$

となる。これらを計算する。

$$y_1' y_2 - y_1 y_2' = a \cos^2 ax + a \sin^2 ax = a$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{a} \int f(x) \cos ax dx \\ u_2 &= -\frac{1}{a} \int f(x) \sin ax dx \end{aligned}$$

以上より、積分定数を A, B として一般解は、

$$y = A \sin ax + B \cos ax + \frac{1}{a} \left\{ \sin ax \int f(x) \cos ax dx - \cos ax \int f(x) \sin ax dx \right\}$$

となる。

3　問題

1. 三角関数の直交性を証明せよ。
2. $f(x) = |x|\,(-\pi \le x \le \pi)$ をフーリエ級数展開せよ。
3. 2. を参考に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ を求めよ。

3.1

三角関数の直交性は、

$$\int_0^{2\pi}\cos nx\cos mx dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin nx\sin mx dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos nx\sin mx dx = 0$$

を証明すればよい。

積分を計算するために、以下の三角関数の公式を使う。

$$\begin{aligned}
\cos a\cos b &= \frac{1}{2}\{\cos(a+b)+\cos(a-b)\} \\
\sin a\sin b &= \frac{1}{2}\{\cos(a-b)-\cos(a+b)\} \\
\cos a\sin b &= \frac{1}{2}\{\sin(a+b)-\sin(a-b)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos^2 a &= \frac{1+\cos 2a}{2} \\
\sin^2 a &= \frac{1-\cos 2a}{2} \\
\cos a\sin a &= \frac{\sin 2a}{2}
\end{aligned}$$

積分を計算する。

第 1 式について、$n = m$ の場合

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\cos nx\cos mx dx &= \int_0^{2\pi}\cos^2 nx dx \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx \\
&= \left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4n}\sin 2nx\right]_0^{2\pi} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

第 1 式について、$n \neq m$ の場合

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\cos nx\cos mx dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos\{(n+m)x\}+\cos\{(n-m)x\}\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+m}\sin\{(n+m)x\}+\frac{1}{n-m}\sin\{(n-m)x\}\right]_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

第 2 式について、$n=m$ の場合

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sin nx\sin mxdx &= \int_0^{2\pi}\sin^2 nxdx\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx\\ &= \left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4n}\sin 2nx\right]_0^{2\pi}\\ &= \pi\end{aligned}$$

第 2 式について、$n\neq m$ の場合

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sin nx\sin mxdx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos\{(n-m)x\}-\cos\{(n+m)x\}\right]dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-m}\sin\{(n-m)x\}-\frac{1}{n+m}\sin\{(n+m)x\}\right]_0^{2\pi}\\ &= 0\end{aligned}$$

第 3 式について、$n=m$ の場合

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos nx\sin mxdx &= \int_0^{2\pi}\cos nx\sin nxdx\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{\sin(2nx)}{2}dx\\ &= \left[-\frac{1}{4n}\cos(2nx)\right]_0^{2\pi}\\ &= 0\end{aligned}$$

第 3 式について、$n\neq m$ の場合

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos nx\sin mxdx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\sin\{(n+m)x\}-\sin\{(n-m)x\}\right]dx\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{n+m}\cos\{(n+m)x\}+\frac{1}{n-m}\cos\{(n-m)x\}\right]_0^{2\pi}\\ &= 0\end{aligned}$$

以上の計算から、三角関数の直交性が示された。

3.2

$$f(x)=|x|\quad -\pi\leq x\leq\pi$$

をフーリエ級数、

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\}$$

に展開する。ただし a_n, b_n はフーリエ級数である。

三角関数の直交性から、フーリエ係数を求める。

$$
\begin{aligned}
\pi a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) : \cos(nx)dx \\
&= \left\{ -\int_{-\pi}^{0} x\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx \right\} \\
&= -\left[x \cdot \frac{1}{n}\sin(nx) \right]_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0} \frac{1}{n}x\cos(nx)dx + \left[x \cdot \frac{1}{n} sin(nx) \right]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \frac{1}{n}x\sin(nx)dx \\
&= -\left[\frac{1}{n^2}\cos(nx) \right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{1}{n^2}\cos(nx) \right]_{0}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} cos(n\pi) + \frac{1}{n^2}\cos(n\pi) - \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{2}{n^2}\left\{ \cos(n\pi) - 1 \right\} \\
&= \frac{2}{n^2}\left\{ (-1)^n - 1 \right\}
\end{aligned}
$$

$f(x)$ は偶関数であるから、$\sin(nx)$ の係数は $b_n = 0$ となる。また、$\frac{a_0}{2}$ は $f(x)$ の平均値であるから、$a_0 = \pi$ となる。したがって、フーリエ級数は、

$$
f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}\left\{ (-1)^n - 1 \right\}\cos(nx) = |x|
$$

となる。

3.3

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}
$$

を求める。

3.2 より、

$$
|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}\left\{ (-1)^n - 1 \right\}\cos(nx)
$$

である。n が偶数の場合は、フーリエ係数は 0 になる。したがって、この式を書き換えれば、

$$
|x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos\left\{ (2n-1)x \right\}
$$

となる。この等式について、$x = 0$ とすれば、

$$
0 = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}
$$

となる。移項すると、

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}
$$

となる。

4　問題

1. C を半径 a、中心 0 の閉曲線とする。このとき、
$$\int_C \frac{1}{(z-z_0)^n} dz$$
を計算せよ。ただし、n は 0 以上の整数とする。

2. 以下の積分を計算せよ。
$$f(z) = \ln(z-b) + ln(z - \frac{a^2}{b}) - \ln z$$
$$\int_C \left\{f'(z)\right\}^2 dz$$
ただし、$b > a$ とする。

4.1

コーシーの積分定理、留数定理から、
$$\int_C \frac{1}{(z-z_0)^n} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & for\ |z_0| > a \\ 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), z_0] & for\ |z_0| < a \end{array} \right.$$
となる。それぞれの n の場合について、留数を求める。
$n = 1$ の場合
$$\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{z-z_0} \cdot (z-z_0) = 1$$
$n \geq 2$ の場合
$$\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = \lim_{z \to z_0} \frac{d^n}{dz^n} \left\{ \frac{1}{(z-z_0)^n} \cdot (z-z_0)^n \right\} = \frac{d^n}{dz^n}(1) = 0$$
したがって、以下のようになる。
$|z_0| > a$ の場合は、
$$\int_C \frac{1}{(z-z_0)^n} = 0$$
$|z_0| < a$ の場合は、
$$\int_C \frac{1}{(z-z_0)^n} = \left\{ \begin{array}{cc} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{array} \right.$$