九州大学工学部平成16年度編入学試験問題 数学

1 問題

次の連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を考える。ただし、

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 14 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

である。このとき、以下の問いに答えよ。

1. 上三角行列 $\boldsymbol{U}$ と、対角成分が 1 の下三角行列 $\boldsymbol{L}$ を用いて、$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ と書くとき、$\boldsymbol{L}, \boldsymbol{U}$ を求めよ。
2. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解は以下の 2 つの問題を解くことで求めることを説明せよ。

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y} \end{array} \right.$$

3. 2. の方法で $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を解け。

1.1

行列 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{U}$ をそれぞれ次のように置く。

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ を求める。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{LU} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ l_1 u_1 & l_1 u_2 + u_4 & l_1 u_3 + u_5 \\ l_2 u_1 & l_2 u_2 + l_3 u_4 & l_2 u_3 + l_3 u_5 + u_6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

各成分について次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \\ u_2 &= 3 \\ u_3 &= 0 \\ l_1 u_1 = 4 &\rightarrow l_1 = 2 \\ l_1 u_2 + u4 = 8 &\rightarrow u_4 = 2 \\ l_1 u_3 + u_5 = 4 &\rightarrow u_5 = 4 \\ l_2 u_1 = 0 &\rightarrow l_2 = 0 \\ l_2 u_2 + l_3 u_4 = 6 &\rightarrow l_3 = 3 \\ l_2 u_3 + l_3 u_5 L u_6 = 14 &\rightarrow u_6 = 2 \end{aligned}$$

行列は次のようになる。

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2

$$\begin{cases} \boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y} \end{cases}$$

1.1 で求めた行列 $\boldsymbol{L}$ は $|\boldsymbol{L}|= 1$ であるから、逆行列 $\boldsymbol{L^{-1}}$ を持つ。行列 $\boldsymbol{L}$ を含む式に、逆行列 $\boldsymbol{L^{-1}}$ をかける。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Ly} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{L^{-1}b} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{y}$ を行列 $\boldsymbol{U}$ を含む式に代入する。

$$\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{L^{-1}b}$$

行列 $\boldsymbol{U}$ も同様に逆行列 $\boldsymbol{U^{-1}}$ を持つ。逆行列行列 $\boldsymbol{U^{-1}}$ をかけ、$\boldsymbol{x}$ について解く。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{U^{-1}L^{-1}b} \\ &= (\boldsymbol{LU})^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{A^{-1}b} \end{aligned}$$

このように、$\boldsymbol{x}$ について求めると、方程式 $\boldsymbol{Ax = b}$ を解いた場合に等しい解が得られることが分かる。

1.3

行列 $\boldsymbol{U, L}$ の逆行列 $\boldsymbol{U^{-1}, L^{-1}}$ を求める。

$$\boldsymbol{U^{-1}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{L^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 の式を用いて、$\boldsymbol{y, x}$ を求める。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{L^{-1}b} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{U^{-1}y} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2 問題

1. 次の線形非同次微分方程式
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$
の一般解は
$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right)$$
で与えられることを示せ。ただし、$P(x), Q(x)$ は x の連続関数あり、c は任意の定数である。

2. 次の微分方程式の一般解を求めよ。
$$x\frac{dy}{dx} - y = x(1+2x^2)$$

3. 適切な変数変換を利用して、次の微分方程式の一般解を求めよ。さらに、$x=1, y=1$ となるような解を求めよ。
$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = \frac{\log x}{2x}y^3$$

2.1

同次方程式の解を求める。
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + P(x)y &= 0 \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -P(x)\end{aligned}$$

積分定数を c として積分する。
$$\begin{aligned}\ln y &= -\int P(x)dx + c \\ y &= e^{-\int P(x)dx+c} \\ &= ce^{-\int P(x)dx}\end{aligned}$$

非同次解を求める。
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$
定数変化法を用いる。同次方程式の解から、解を次のように仮定する。
$$y = u(x)e^{-\int P(x)dx}$$

方程式に代入する。
$$\frac{du(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} - P(x)u(x)e^{-\int P(x)}dx + P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$
$$\frac{du}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$
積分定数を c として積分し u を求める。
$$u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + c$$

以上より、一般解は次のようになる。
$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right)$$

2.2

$$x\frac{dy}{dx}-y=x(1+2x^2)$$

x で両辺を割る。

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=x(1+2x^2)$$

2.1 の公式を使う。ここで、$P(x)=-\frac{1}{x}, Q(x)=2x^2+1$ である。

$$\begin{aligned}y &= e^{\int\frac{1}{x}dx}\left\{\int(2x^2+1)e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+c\right\}\\ &= e^{\ln x}\left\{\int(2x^1+1)e^{-\ln x}dx+c\right\}\\ &= x(x^2+\ln x+c)\end{aligned}$$

2.3

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x}=\frac{\ln x}{2x}y^3$$

これは、$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$ の形の微分方程式であり、ベルヌーイの微分方程式と呼ばれる。したがって変数変換は、$y^{1-n}=z$ とすればよく、この場合は次のようになる。

$$y^{-2}=z, y=z-\frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\frac{dz}{dx}$$

方程式を書き換える。

$$-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\frac{dz}{dx}-\frac{1}{2x}z^{-\frac{1}{2}}=\frac{\ln x}{2x}z^{-\frac{3}{2}}$$

$-2z^{\frac{3}{2}}$ をかけ、式を整理する。

$$\frac{dz}{dx}+\frac{1}{x}z=-\frac{\ln x}{x}$$

z の一般解は、$P(x)=\frac{1}{x}, Q(x)=-\frac{\ln x}{x}$ とし、2.1 の公式にから求められる。

$$\begin{aligned}z &= e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left\{-\int\frac{\ln x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+c\right\}\\ &= \frac{1}{x}\left\{-\int\frac{\ln x}{x}xdx+c\right\}\\ &= -\frac{1}{x}\left\{x\ln x-x+c\right\}\end{aligned}$$

変換 $z=y^2$ を元に戻すと、y が求められる。

$$y=\frac{\pm\sqrt{x}}{\sqrt{x-x\ln x+c}}$$

境界条件 $y=1, x=1$ を代入する。

$$1=\frac{1}{\sqrt{1+c}}$$
$$\rightarrow c=0$$

したがって、境界条件を満たす特殊解は次のようになる。

$$y^2=\frac{1}{1-\ln x}$$

3 問題

$f = x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 - 1$ とする。座標系の原点を O, x, y, z 軸上で正の向きを持つ単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とし、以下の問いに答えよ。

1. スカラー場 f の勾配を計算せよ。
2. 曲面 $f = 0$ 上の点 $P(x_0, y_0, z_0)$ における勾配ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{OP}$ とのなす角を z_0 を用いて表せ。
3. $x = \sin\theta\cos\phi, y = \sin\theta\sin\phi, z = 2\cos\theta$ とおく。ただし、$0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi 2\pi$ である。曲面 $f = 0$ 上の点 $Q(\sin\theta\cos\theta, \sin\theta\sin\phi, 2\cos\theta)$ における接平面を張る 2 つのベクトルの組を示し、法線ベクトルを計算せよ。
4. 3. と同じ条件で、$0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ により囲まれる曲面の面積を $S(\theta)$ とする。$\frac{dS}{d\theta_0}$ を求めよ。ただし、$0 \leq \theta_0 \leq \pi$ である。

3.1

勾配をともめる。

$$\mathrm{grad}(f) = (2x, 2y, \frac{1}{2}z)$$

3.2

$P(x_0, y_0, z_0)$ における勾配ベクトル $\boldsymbol{a}$ は次のようになる。

$$\boldsymbol{a} = (2x_0, 2y_0, \frac{1}{2}z_0)$$

ベクトル $\boldsymbol{OP}$ は次のようになる。

$$\boldsymbol{OP} = (x_0, y_0, z_0)$$

内積をとる。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{OP} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{OP}| \cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{OP}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{OP}|}$$

ただし、θ は 2 つのベクトルのなす角である。θ を求める。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{OP} = 2x_0^2 + 2y_0^2 + \frac{1}{2}z_0^2$$

ここで、$f = 0$ より、$x_0^2 + y_0^2 = 1 - \frac{1}{4}z_0^2$ を代入する。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{OP} = 2(1 - \frac{1}{4}z_0^2) + \frac{1}{2}z_0^2 = 2$$

また、絶対値の積も同様に $x_0^2 + y_0^2 = 1 - \frac{1}{4}z_0^2$ を用いて次のようになる。

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{OP}| &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}\sqrt{4x_0^2 + 4y_0^2 + \frac{1}{4}z_0^2} \\
&= \sqrt{1 - \frac{1}{4}z_0^2 + z_0^2}\sqrt{4(1 - \frac{1}{4}z_0^2) + \frac{1}{4}z_0^2} \\
&= \sqrt{1 + \frac{3}{4}z_0^2}\sqrt{4 - \frac{3}{4}z_0^2}
\end{aligned}$$

したがって、2 つのベクトルがなす角は次のようになる。

$$\theta = \cos^{-1}\left\{\frac{8}{\sqrt{4 + 3z_0^2}\sqrt{16 - 3z_0^2}}\right\}$$

3.3

問題で与えられているように、x, y, z はそれぞれ θ, ϕ と次の関係にあるものとする。

$$\begin{cases} x &= \sin\theta\cos\phi \\ y &= \sin\theta\sin\phi \\ z &= 2\cos\theta \end{cases}$$

x, y, z により作られる曲面を表すベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする。

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\theta, \phi) = \boldsymbol{r}(x, y, z)$$

一方、与えられた x, y, z を f に代入すると次のにようになる。

$$\begin{aligned} f &= \sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta - 1 \\ &= \sin^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \cos^2\theta - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって曲面 F$f = 0$ と x, y, z からなるベクトル $\boldsymbol{r}$ により与えられる曲面は同じ曲面である。

曲面 $\boldsymbol{r}(\theta, \phi)$ の接平面に含まれる 2 組のベクトルは次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} &= (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -2\sin\theta) \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} &= (-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0) \end{aligned}$$

法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ はこの 2 組の外積である。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -2\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{i}(2\sin^2\theta\cos\phi) + \boldsymbol{j}(2\sin^2\theta\sin\phi) + \boldsymbol{k}(\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + \sin\theta\cos\theta\sin^2\phi) \end{aligned}$$

3.4

曲面の面積は、曲面を作るベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} S(\theta_0) &= \iint_D \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right| d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_0} \sqrt{4\sin^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta} d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\theta_0} \sqrt{4\sin^4\theta + \sin^2\theta(1 - \sin^2\theta)} d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\theta_0} \sin\theta\sqrt{3\sin^2\theta + 1} d\theta \end{aligned}$$

$\cos\theta = X$ とおくと、$-\sin\theta d\theta = dX, \theta = \theta_0 \to X = \cos\theta\_0, \theta = 0 \to X = 1$ となる。

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_1^{\cos\theta_0} \sqrt{3(1 - \cos^2) + 1}(-dX) \\ &= 2\pi \int_{\cos\theta_0}^1 \sqrt{4 - X^2} dX \\ &= \pi \left\{ \left[X\sqrt{4 - X^2} L 4\sin^{-1}\frac{X}{2} \right]_{\cos\theta_0}^1 \right\} \\ &= \pi \left\{ \sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi - \cos\theta_0\sqrt{4 - \cos^2\theta_0} - 4\sin^{-1}\frac{\theta_0}{2} \right\} \end{aligned}$$

$\dfrac{dS}{d\theta_0}$ を求める。

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{d\theta_0} &= \sin\theta_0\sqrt{4-\cos^2\theta_0}+\frac{2\cos^2\theta_0\sin\theta_0}{2\sqrt{4-\cos^2\theta_0}}-\frac{4}{1-\dfrac{\cos^2\theta_0}{4}}\cdot\left(-\frac{\sin\theta_0}{2}\right)\\
&= \sin\theta_0\sqrt{4-\cos^2\theta_0}+\frac{\cos^2\theta_0\sin\theta_0}{\sqrt{4-\cos^2\theta_0}}+\frac{4\sin\theta_0}{4-\cos^2\theta_0}\\
&= \frac{1}{\sqrt{4-\cos^2\theta_0}}\left\{\sin\theta_0(4-\cos^2\theta_0)+\cos^2\theta_0\sin\theta_0+4\sin\theta_0\right\}\\
&= \frac{8\sin\theta_0}{4-\cos^2\theta_0}
\end{aligned}$$

4 問題

複素平面上の中心 a、半径 r の半円 $C_r(a)$ を $C_r(a) = \left\{z = a + re^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq \pi\right\}$ で定める。ただし、$i = \sqrt{-1}$ である。

1. 正則関数 $f(z)$ に対して次式を示せ。ただし、$z = a + \epsilon e^{i\theta}$ とおいて考えよ。

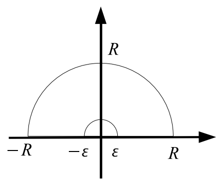
$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_\epsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a} dz = i\pi f(a)$$

2. 不等式 $\dfrac{2}{\pi}\theta \leq \sin\theta (0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2})$ が成り立つことを示せ。

3. 2. の結果を用いて次式を証明せよ。

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

4. 関数 $\dfrac{e^{iz}}{z}$ の積分を図の矢印に示す道に沿って考えることにより、定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ の値を計算せよ。

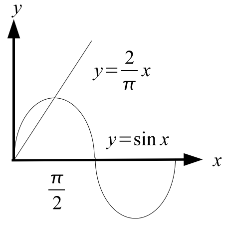


4.1

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_\epsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a} dz &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^\pi \frac{f(a+\epsilon e^{e\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon i e^{i\theta} d\theta \\
&= \int_0^\pi i f(z) d\theta \\
&= i\pi f(a)
\end{aligned}$$

4.2

$y = \frac{2}{\pi}\theta, y = \sin\theta$ を図に示す。図より不等式 $\dfrac{2}{\pi} \leq \sin\theta$ が成り立つことが分かる。



4.3

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{C_R(0)}\frac{e^{iz}}{z}dz &= \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \frac{e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}}Rie^{i\theta}d\theta \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi ie^{iR\cos\theta}\cdot e^{-R\sin\theta}d\theta\end{aligned}$$

絶対値をとると次の大小関係が成り立つ。

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz\right| \leq \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\theta$$

$\sin\theta$ の $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi$ に対する対象性から積分範囲を次のように変更する。

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\theta = 2\lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta$$

4.2 の不等式から次式が成り立つ。

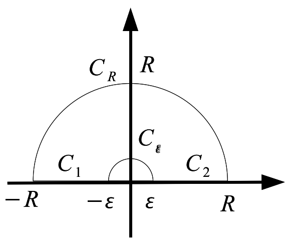
$$\begin{aligned}2\lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta &\leq 2\lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}R\theta}d\theta \\ &= 2\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{\pi}{2R}e^{-\frac{2}{\pi}R\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}) \\ &= 0\end{aligned}$$

絶対値が 0 になるので、次式が証明される。

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R(0)}\frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

4.4

積分路を次のようにとる。



$$C = C_1 + C_2 + C_\epsilon + C_R$$

このとき、C 内部に $\dfrac{e^{iz}}{z}$ の特異点は含まれない。したがってコーシーの積分定理から C 上の積分について次式が成り立つ。

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

C_1, C_2 上の積分を I_1 と表す。積分路はそれぞれ次のようにとる。

$$\begin{aligned}C_1 &: z(x) = x \quad (-R\leq x\leq -\epsilon) \\ C_2 &: z(x) = x \quad (\epsilon\leq x\leq R)\end{aligned}$$

積分を求める。

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{C_1+C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz \\
&= \int_R^{\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx \\
&= -\int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{-ix}}{x} dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx
\end{aligned}
$$

$\epsilon \to 0, R \to \infty$ とする。

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx \\
&= 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx
\end{aligned}
$$

次に、C_ϵ 上の積分を I_ϵ と表す。$\epsilon \to 0$ とする。

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} I_\epsilon &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-C_\epsilon(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz \\
&= -i\pi e^{iz}\Big|_{z=0} \\
&= -i\pi
\end{aligned}
$$

C_R 上の積分を I_R と表す。$R \to \infty$ とする。

$$
\begin{aligned}
\lim_{R \to \infty} I_R &= \lim_{R \to \infty} \int_{C_R(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz \\
&= 0
\end{aligned}
$$

以上の結果から、次の等式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_\epsilon + I_R &= 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \pi i \\
&= 0
\end{aligned}
$$

したがって求める積分値は次のようになる。

$$
\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}
$$