九州大学工学部平成 15 年度編入学試験問題 数学

1 問題

次の各問いに答えよ。

1. 行列の階数の定義について、以下の下線部に大切な単語を入れよ。
   (a) $\boldsymbol{A}$ の 0 でない小行列の________
   (b) $\boldsymbol{A}$ の________ な列ベクトルの最大個数
   (c) $\boldsymbol{A}$ の________ な行ベクトルの最大個数
   (d) $\boldsymbol{A}$ で定まる線形変換の________
2. 行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   の階数を求めよ。
3. 次の連立方程式に会があれば、そのすべてを求めよ。

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

1.1

$\boldsymbol{A}$ の 0 でない小行列式の最大次数
$\boldsymbol{A}$ の線形独立な列ベクトルの数
$\boldsymbol{A}$ の線形独立な行ベクトルの数
$\boldsymbol{A}$ で定まる線形変化の値域の次元

1.2

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ の 3×3 の小行列式をとり、その値を求める。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -23$$

0 にならない 3 の成分をもつ小行列式があるので、1.1 の定義より階数は 3 である。

1.3

$$
\begin{aligned}
x_1 + 4x_3 + 2x_4 &= 2 \\
3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 3 \\
x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1
\end{aligned}
$$

行列で表現する。

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ と表すと、方程式は次のように書ける。

$$
\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{B}
$$

可解条件は拡大係数 $[\boldsymbol{A}\,|\boldsymbol{b}]$ を用いて次のようになる。

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{A}\,|\boldsymbol{b}] &= \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) \\
&= 3
\end{aligned}
$$

拡大係数行列 $[\boldsymbol{A}\,|\boldsymbol{b}]$ の階数を求める。3×3 の成分をもつ小行列を取り出し、値を求める。

$$
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0
$$

したがって、階数は 3 であり、連立方程式は解を持つ。
また 4 変数に対し 3 つの式が与えられているので、解は無限に存在する。以下に、拡大係数行列を示し、

基本変形する。

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \\
\rightarrow &\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \\
\rightarrow &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \\
\rightarrow &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 14 & 5 \end{array}\right) \\
\rightarrow &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 25 & 100 & 50 & 50 \\ 0 & 0 & -25 & 0 & -9 \end{array}\right) \\
\rightarrow &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 25 & 0 & 50 & 14 \\ 0 & 0 & -25 & 0 & -9 \end{array}\right) \\
\rightarrow &\left(\begin{array}{cccc|c} 25 & 75 & 50 & 150 & 75 \\ 0 & 25 & 0 & 50 & 14 \\ 0 & 0 & -25 & 0 & -9 \end{array}\right) \\
\rightarrow &\left(\begin{array}{cccc|c} 25 & 0 & 50 & 0 & 33 \\ 0 & 25 & 0 & 50 & 14 \\ 0 & 0 & -25 & 0 & -9 \end{array}\right) \\
\rightarrow &\left(\begin{array}{cccc|c} 25 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 25 & 0 & 50 & 14 \\ 0 & 0 & -25 & 0 & -9 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

以上より、次の解を得る。

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{3}{5} \\
25x_1 + 50x_4 &= 14 \\
x_3 &= \frac{9}{25}
\end{aligned}
$$

$x_1 = C$(任意定数) とすると、無限個の解が存在する。

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ \frac{3}{5} \\ \frac{9}{25} \\ \frac{14-C}{50} \end{pmatrix}
$$

2 問題

y を x の関数、a, b を定数とする。また、微分方程式 $y'' + ay' + by = f(x)$ に対する特解を y_1 とし、$y'' + ay' + by = g(x)$ に対する特解を y_2 とする。このとき、

1. 微分方程式 $y'' + ay' + by = f(x) + g(x)$ に対する一つの特解は $y_1 + y_2$ となることを示せ。
2. 微分方程式 $y'' + y' - 2 = \cos x + e^{-x}$ に対する一般解を求めよ。

2.1

$$y'' + ay' + by = f(x) + g(x) \tag{2.1}$$

問いより、y_1, y_2 は次式を満たす。

$$\begin{aligned} y_1'' + ay_1' + by_1 &= f(x) \\ y_2'' + ay_2' + by_2 &= g(x) \end{aligned}$$

式**??**に $y = y_1 + y_2$ を代入する。

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= y_1'' + y_2'' + a(y_1' + y_2') + b(y_1 + y_2) \\ &= y_1'' + ay_1' + by_1 + y_2'' + ay_2' + by_2 \\ &= f(x) + g(x) \end{aligned}$$

2.2

$$y'' + 2y' - 2y = \cos x + e^{-x}$$

同次方程式の解を求める。

$$y'' + y' - 2y = 0$$

$y \propto\ e^{\lambda x}$ と仮定し、方程式に代入する。特性方程式と特性根は次のようになる。

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda - 2 &= 0 \\ (\lambda - 1)(\lambda + 2) &= 0 \\ \lambda &= 1, -2 \end{aligned}$$

積分定数を C_1, C_2 として、同次方程式の解は次のようになる。

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} \tag{2.2}$$

非同次解を求める。

$$y'' + y' - 2y = \cos x + e^{-x} \tag{2.3}$$

2.1 より、次の 2 つの方程式を考える。

$$y'' + y' - 2y = \cos x \tag{2.4}$$

$$y'' + y' - 2y = e^{-x} \tag{2.5}$$

式**??**の非同次解をともめる。解を定数 A, B を使い、次のように仮定する。

$$y = A\cos x + B\sin x$$

方程式に代入し、A, B に関する連立方程式を得る。

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$A = -\frac{3}{10}, B = \frac{1}{10}$$

したがって式**??**の非同次解は次のようになる。

$$y = -\frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$$

??の非同次解を求める。解を定数 A, B を用いて次のように仮定する。

$$y = Ae^{-x} + B$$

式**??**に代入し、A, B に関して次式を得る。

$$A = -\frac{1}{2}$$
$$B = 0$$

したがって式**??**の非同次解は次のようになる。

$$y = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

以上より、式**??**の一般解は次のようになる。

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x)$$

3 問題

z を複素数とする。複素平面状の経路 C に沿う積分 $\displaystyle\int_C \frac{e^{az}}{1+e^z}dz (0<a<1)$ について、次の問いに答えよ。

1. 積分路 C を 4 点 $-R, R, R+i2\pi, -R+i2\pi (R>0)$ を頂点とする長方形に摂るとき、C で囲まれる領域内にある特異点、およびその点における留数を求めよ。
2. $\displaystyle\int_{-\infty} \infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx (0<a<1)$ を計算せよ。

3.1

被積分関数を $f(z)$ と表す。

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

e^{az} は全領域で正則である。$f(z)$ の極は次式を見たす。

$$1+e^z = 0$$

すなわち、極は次のようになる。

$$\begin{aligned} z &= \ln(-1) \\ &= \ln(1) + iarg(-1) \\ &= \pi i + 2n\pi i \end{aligned}$$

ただし $n = 0, 1, 2, \cdots$ となる整数とする。積分路 C 内に含まれる極は一つである。

$$z = \pi i$$

留数を求める。

$$\mathrm{Res}[f(z), \pi i] = \lim_{z\to\pi i} \frac{(z-\pi i)e^{az}}{1+\mathrm{e}^z}$$

これは $\dfrac{0}{0}$ の不定形である。したがって、ロピタルの定理により次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}[f(z), \pi i] &= \lim_{z\to\pi i} \frac{\mathrm{e}^{az} + (z-\pi i)a\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^z} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{a\pi i}}{\mathrm{e}^{\pi i}} \\ &= e^{\pi i(a-1)} \end{aligned}$$

3.2

積分路を $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ と表す。

$$\begin{aligned} C_1 : z(t) &= t & (-R \le t \le R) \\ C_2 : z(t) &= R + it & (0 \le t \le 2\pi) \\ -C_3 : z(t) &= t + 2\pi i & (-R \le t \le R) \\ -C_4 : z(t) &= -R + it & (0 \le t \le 2\pi) \end{aligned}$$

C_1 上の積分 I_1:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{C_1} \frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^z} dz \\ &= \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{at}}{1+\mathrm{e}^t} dt \end{aligned}$$

$R \to \infty$ とする。

$$\lim_{R\to\infty} I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{at}}{1+\mathrm{e}^t} dt$$

C_2 上の積分 I_2:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{C_2} \frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^z} dz \\ &= \int_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}} idt \end{aligned}$$

絶対値を取り $R \to \infty$ とする。

$$|I_2| \le \int_0^{2\pi} \frac{|\mathrm{e}^{ait}||\mathrm{e}^{aR}|}{|1+\mathrm{e}^{R+it}|} dt$$

$|e^{ait}| = 1, |1+\mathrm{e}^R \cdot \mathrm{e}^{aR}| \le |1-\mathrm{e}^R|$ を用いる。

$$\begin{aligned} |I_2| &\le \int_{2\pi}^{0} \frac{\mathrm{e}^{aR}}{|1-\mathrm{e}^R|} dt \\ &= \frac{2\pi\mathrm{e}^{aR}}{\mathrm{e}^R - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} |I_2| &\le \lim_{R\to\infty} \frac{2\pi\mathrm{e}^{aR}}{\mathrm{e}^R - 1} \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{2\pi}{\mathrm{e}^{R(1-a)} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{ar}}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$0 < a < 1$ を用いる。

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} |I_2| &= 0 \\ &\to \lim_{R\to\infty} I_2 = 0 \end{aligned}$$

C_3 上の積分 I_3

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{C_3} \frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^z} dz \\ &= -\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{a(2\pi i+t)}}{1+\mathrm{e}^{2\pi i+t}} dt \end{aligned}$$

$R \to \infty$ とする。

$$\lim_{R\to\infty} I_3 = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi ia}\cdot\mathrm{e}^{at}}{1+\mathrm{e}^t} dt \tag{3.2}$$

C_4 上の積分 I_4

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{C_4} \frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^z} dz \\ &= -\int_0^{2\pi} \frac{e^{a(-R+it)}}{1+e^{-R+it}} \cdot i dt \end{aligned}$$

絶対値を取り、$R \to \infty$ とする。また、$|\mathrm{e}^{ait}| = 1, |1+e^{-R} \cdot \mathrm{e}^{it}| \leq 1 - e^{-R}$ を用いる。

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \int_{2\pi}^0 \frac{\mathrm{e}^{-aR}}{1-e^{-R}} dt \\ &= \frac{2\pi \mathrm{e}^{-aR}}{1-e^{-R}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} |I_4| &= \lim_{R\to\infty} \frac{2\pi \mathrm{e}^{-aR}}{1-\mathrm{e}^{-R}} \\ &= 0 \\ \lim_{R\to\infty} I_4 &= 0 \end{aligned}$$

一方留数定理から、全体の積分値は次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^z} dz &= 2\pi \mathrm{Res}[f(z), \pi i] \\ &= 2\pi i \mathrm{e}^{\pi i(a-1)} \\ &= 2\pi i \mathrm{e}^{-\pi i} \cdot \mathrm{e}^{\pi i a} \\ &= -i 2\pi \mathrm{e}^{\pi i a} \end{aligned}$$

以上の結果から次の等式が成り立つ。

$$\lim_{R\to\infty} I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -2\pi i \mathrm{e}^{\pi i a}$$

$$(1-\mathrm{e}^{2\pi i a}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+e^x} dx = -2\pi i \mathrm{e}^{\pi i a}$$

両辺の実部・虚部をとる。

$$\begin{aligned} \{1-\cos(2\pi a)\} \int_{-\infty} \infty \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+e^z} dx &= 2\pi \sin(\pi a) \\ -\sin(2\pi a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^x} dx &= -2\pi \cos(\pi a) \end{aligned}$$

等式を変形する。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx &= \frac{2\pi \sin(\pi a)}{1-\cos(2\pi a)} \\ &= \frac{2\pi \sin(\pi a)}{2\sin^2(\pi a)} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx &= \frac{2\pi \cos(\pi a)}{\sin(2\pi a)} \\ &= \frac{2\pi \cos(\pi a)}{2\cos(\pi a)\sin(\pi a)} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \end{aligned}$$

4 問題

1 つのサイコロを続けて投げる動作を考える。偶数の目が k(k は自然数) 回出た時点で、この動作を終了する (必ずしも連続して k 回出る必要はない)。このとき、n 回目で動作が終了する確率を、$p_n(k), n \leq k$ とする。次の問いに答えよ。

1. $k = 5$ とした $p_n(5)$ を求めよ。
2. 一般的な k(k は自然数) の場合において、$p_n(k)$ を求めよ。
3. 一般的な k(k は自然数) の場合において、$p_n(k)$ を最大にする n をすべて求めよ。

4.1

偶数・奇数が出る確率はともに $\dfrac{1}{2}$ である。n 回目で動作を終了するので、n 回目は必ず偶数が出る。残りの $n-1$ 回から 4 回偶数を取る取りかたは、

$$_{n-1}C_4 \text{ 通り}$$

である。したがって、確率は、

$$p_n(5) = {}_{n-1}C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

となる。

4.2

4.1 と同様に考えて、

$$p_n(k) = {}_{n-1}C_{k-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4.3

4.2 で求めた一般の k に対する確率は次のように書ける。

$$\begin{aligned} p_n(k) = {}_{n-1}C_{k-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \\ &= {}_{n-1}C_{k-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k+1} \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot {}_{n-1}C_{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)-(k-1)} \end{aligned}$$

これは $n-1$ 回のうちある事象 (確率 $\dfrac{1}{2}$) が、$k-1$ 回起こる確率が、二項分布に従うことを示している。また、偶数・奇数が出る確率はともに等しく $\dfrac{1}{2}$ であるから、確率のピーク値は分布の中心になる。

$n-1$ が偶数の場合は、確率のピーク値は 1 つになる。そのときの k の値は n を用いて、

$$\begin{aligned} k &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(n+1) \end{aligned}$$

となる。$n-1$ が奇数のとき、確率のピーク値は 2 になる。

$$
\begin{aligned}
k-1 &= \frac{1}{2}(n-1-1) \\
& \frac{1}{2}(n-2) \\
k &= \frac{n}{2} \\
k &= \frac{n}{2}+1
\end{aligned}
$$

したがって確率のピーク値は n の値により次のようにまとめられる。

$$
p_{max} = \begin{cases} k = \dfrac{1}{2}(n+1) & (n \text{ が奇数のとき}) \\ k = \dfrac{1}{2}, \dfrac{n}{2}+2 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}
$$