九州大学工学部平成14年度編入学試験問題 数学

1 問題

$F(z) = \int_C \frac{\mathrm{e}^{imz}}{z^4 + a^4} dz$ について、以下の問いに答えよ。

1. 非積分関数の特異点と留数を求めよ。
2. $F(z)$ を求めよ。
3. $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^4 + a^4} dx$ を求めよ。

1.1

被積分関数を $f(z)$ と表す。

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{imz}}{z^4 + a^4}$$

特異点は、次式を満たす点である。

$$\begin{aligned} z^4 + a^4 &= 0 \\ z^4 &= -a^4 \\ &= a^4 \mathrm{e}^{\pi i} \\ \left(\frac{z}{a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}} \right) &= 1 \end{aligned}$$

1 の 4 乗根は、$1, \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}i}, \mathrm{e}^{\pi i}, \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}i}$ である。したがって、$f(z)$ の特異点は、次のようになる。

$$\begin{aligned} z &= a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i} \\ z &= a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} = a\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}} \\ z &= a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i} \cdot \mathrm{e}^{\pi i} = a\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}} \\ z &= a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i} \cdot \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}} = a\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{4}} \end{aligned}$$

次に、それぞれの留数を求める。すべて $\frac{0}{0}$ の不定形になるから、ロピタルの定理を使用する。

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}[f(z), a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}i] &= \lim_{z \to a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}i} \frac{(z - a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}i)}{z^4 + a^4} \mathrm{e}^{imz} \\ &= \lim_{z \to a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}i} \frac{\mathrm{e}^{imz} + im(z - a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i})}{4z^3} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{ima\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}i}}{4a^3\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}}i} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{im(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})}}{4a^3\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}i}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z), a\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}}i] &= \lim_{z\to a\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}}i} \frac{(z-a\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}}i)}{z^4+a^4}\mathrm{e}^{imz} \\
&= \lim_{z\to a\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}}i} \frac{\mathrm{e}^{imz}+im(z-a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i})}{4z^3} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{ima\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}}i}}{4a^3\mathrm{e}^{\frac{9\pi}{4}}i} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{im(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})}}{4a^3\mathrm{e}^{\frac{9\pi}{4}i}}
\end{aligned}
$$

同様に残りの場合も計算すると以下のようになる。

$$
\mathrm{Res}[f(z), a\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}}i] = \frac{\mathrm{e}^{-ima(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})}}{4a^3\mathrm{e}^{\frac{15\pi}{4}}i}
$$

$$
\mathrm{Res}[f(z), a\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{4}}i] = \frac{\mathrm{e}^{ima(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})}}{4a^3\mathrm{e}^{\frac{21\pi}{4}}i}
$$

1.2

$r<a$ の場合、C 内部に $f(z)$ の特異点は含まれない。したがって、コーシーの積分定理から次のようになる。

$$
\int_C \frac{\mathrm{e}^{imz}}{z^4+a^4}dz = 0
$$

$r>a$ の場合、C 内部に $f(z)$ の特異点 $a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}, a\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}i}$ が含まれる。したがって、留数定理より、積分値は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\int_C \frac{\mathrm{e}^{imz}}{z^4+a^4}dz &= 2\pi i\left\{\mathrm{Res}[f(z), a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}+\mathrm{Res}[f(z), a\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}i}]\right\} \\
&= 2\pi i\left\{\frac{\mathrm{e}^{ima(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{2})}}{4a^3\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}i}}+\frac{\mathrm{e}^{ima(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{2})}}{4a^3\mathrm{e}^{\frac{9\pi}{4}i}}+\right\} \\
&= \frac{2\pi i}{4a^3}\mathrm{e}^{-ma\frac{1}{\sqrt{2}}}\left\{\mathrm{e}^{ima\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}i}+\mathrm{e}^{-ima\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{9\pi}{4}i}\right\} \\
&= \frac{\pi i}{2a^3}\mathrm{e}^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}}\left\{\mathrm{e}^{\frac{ma}{\sqrt{2}}i}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\mathrm{e}^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}i}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} \\
&= \frac{\pi i}{2a^3}\mathrm{e}^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\left(\mathrm{e}^{\frac{ma}{\sqrt{2}}i}-\mathrm{e}^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}i}\right)-\left(\mathrm{e}^{\frac{ma}{\sqrt{2}}i}+\mathrm{e}^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}i}\right)\right\} \\
&= \frac{\pi i}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}}\left\{-2i\sin\frac{ma}{\sqrt{2}}-2i\cos\frac{ma}{\sqrt{2}}\right\} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}a^3}\mathrm{e}^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}}\left(\sin\frac{ma}{\sqrt{2}}+\cos\frac{ma}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

1.3

積分路 $C=C_r+C_1$ を次のようにとる。ただし $r>a$ であるとする。

$$
C_r : z(t) = r\mathrm{e}^{it} \quad 0\le t\le\pi \tag{1.1}
$$

$$
C_1 : z(t) = t \quad -r\le t\le r \tag{1.2}
$$

C_r 上の積分を求める。

$$\int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{imz}}{z^4+a^4}dz = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{imr(\cot t+i\sin t)}}{r^4\mathrm{e}^{4it}+a^4} ir\mathrm{e}^{it}dt$$

ここで、$\left|\mathrm{e}^{imr(\cos t+i\sin t)}\right| \leq 1, \left|r^4\mathrm{e}^{4it}+a^4\right| \leq a^4 - r4$ を用いて、積分の絶対値をとると、次の大小関係が成り立つ。

$$\left|\int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{imz}}{z^4+a^4}dz\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{1}{a^4-r^4} rdt$$

$r \to \infty$ とすると次のようになる。

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\int_0^{\pi} \frac{r}{a^4-r^4}dt &= \int_0^{\pi} \frac{\frac{1}{r^3}}{\frac{a^4}{r^4}-1}dt \\ &= 0\end{aligned}$$

したがって、$r \to \infty$ の時の積分値は次のようになる。

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{imz}}{z^4+a^4}dz = 0$$

C_1 上の積分を求める。$r \to \infty$ とする。

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \frac{\mathrm{e}^{imz}}{z^4+a^4} &= \lim_{r\to\infty}\int_r^{-r} \frac{\mathrm{e}^{imt}}{t^4+a^4}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{imt}}{t^4+a^4}dt\end{aligned}$$

一方閉曲線 C 上の積分は、1.2 で求められている。したがって次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\int_C \frac{\mathrm{e}^{imz}}{z^4+a^4}dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{imt}}{t^4+a^4}dt \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}a^3}\mathrm{e}^{-\frac{mz}{\sqrt{2}}}\left(\sin\frac{ma}{\sqrt{2}}+\cos\frac{ma}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

等式の実部をとる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mt}{t^4+a^4}dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}a^3}\mathrm{e}^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}}\left(\sin\frac{ma}{\sqrt{2}}+\cos\frac{ma}{\sqrt{2}}\right)$$

左辺の被積分関数は遇関数であるので、次式が成り立つ。

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mt}{t^4+a^4}dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}\mathrm{e}^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}}\left(\sin\frac{ma}{\sqrt{2}}+\cos\frac{ma}{\sqrt{2}}\right)$$

2　問題

行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & a-3 \\ 2 & 1-2 \end{pmatrix}$$

に関して以下の問いに答えよ。

1. 固有値を求めよ。
2. 固有ベクトルを求めよ。
3. $a^n(1,1) + a^n(1,2)$ を計算せよ。ただし、$a^n(i,j)$ は $\boldsymbol{A^n}$ の i 行 j 列成分である。
4. $\boldsymbol{A = A^n}$ になる a の条件を求めよ。

2.1

固有方程式

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) + \det \boldsymbol{A} &= 0 \\ \lambda^2 - (a+1)\lambda + a &= 0 \\ (\lambda - a)(\lambda - 1) &= 0 \end{aligned}$$

したがって、固有値は $\lambda_1 = a, \lambda_2 = 1$ である。

2.2

$\lambda_1 = a$ の場合

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3-a & a-3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \\ x_1 &= x_2 \\ \boldsymbol{x_1} &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\lambda_2 = 1$ の場合

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ 2 & a-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \\ 2x_1 &= (3-a)x_2 \\ \boldsymbol{x_1} &= C_2 \begin{pmatrix} 3-a \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって固有ベクトル $\boldsymbol{x_1, x_2}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{x_2} &= \begin{pmatrix} 3-a \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.3

まず、$\boldsymbol{A^n}$ を考える。対角化行列 $\boldsymbol{P}$ を次のようにとる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} &= (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3-a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}$ を対角化すると次のようになる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P^{-1}AP} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P^{-1}}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A^n}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A^n} &= \boldsymbol{AAAA\cdots AAA} \\ &= \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P^{-1}P}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P^{-1}}\cdots\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P^{-1}}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{P^{-1}}$ は $\boldsymbol{P}$ の逆行列である。

$$\boldsymbol{P^{-1}} = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

以上より $\boldsymbol{A^n}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A^n} &= \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} 1 & 3-1 \\ a^n & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a^n & 3-a \\ a^n & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} 2a^n+a-3 & a^n(a-3)+3-a \\ 2a^n-2 & a^n(a-3)+2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$a^nl(1.1) + a^n(1.2)$ を求める。

$$\begin{aligned}a^n(1.1) + a^n(1.2) &= \frac{1}{a-1}\left\{2a^n + a - 3 + a^n(a-3) + 3 - a\right\} \\ &= \frac{1}{a-1}\left(2a^n + a^{n+1} - 3a^n\right) \\ &= \frac{1}{a-1}a^n\left(a-1\right) \\ &= a^n\end{aligned}$$

2.4

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A^n}$ であるためには、それぞれの行列の各成分が等しければよい。したがって次の等式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} 3 & a-3 \\ 2 & a-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} 2a^n+a-3 & a^n(a-3)+3-a \\ 2a^n-2 & a^n(a-3)+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 &= \dfrac{1}{a-1}(2a^n + a - 3) \\ a-3 &= \dfrac{1}{a-1}(a^n(a-3) + 3 - a) \end{cases}$$

この式の和をとると次の方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned} a &= a^n \\ a - a^n &= 0 \\ a(1-a^{n-1}) &= \\ & a = 0, a = \pm 1 \end{aligned}$$

ただし、$a = 1$ となるのは $n-1$ が偶数のとき、$a = -1$ となるのは $n-1$ が奇数のときである。ただし、$\boldsymbol{P}$ の逆行列が存在する条件が $a \neq 1$ であるから、$a = -1(n-1$ が奇数のとき$)$ が残る。したがって、$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^n$ となる条件は $a = 0, a = -1(n$ は偶数$)$ となる。

3 問題

1. $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leq 1$ $(x, y \leq 0)$ で与えられている面積を求めるとともに図形を描け。

2. $\displaystyle\int_C (xdy - ydx)$ を計算せよ。C は

$$\begin{cases} x = \cos^4\theta \\ y = \sin^4\theta \end{cases}$$

で与えられるものとする。ただし、$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

3.1

まず、図形を考える。$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ について、

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ のとき} \quad y = 0 \\ y = 0 \text{ のとき} \quad x = 0 \end{aligned}$$

となる。$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求め、関数の凹凸を考える。

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \\ &= -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\ &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) \\ &= -\frac{1}{x}\left\{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{y}\right)\sqrt{x} - \sqrt{y}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{x}\left\{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) - \sqrt{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right\} \\ &= -\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{y}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right) \\ &= \frac{1}{2x}\left(1+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

したがって、関数は単調減少で下に凸のグラフになる。また、関数は $(0,1),(1,0)$ を通る。領域を図に示す。

次に面積を求める。x, y を t で置換する。

$$\begin{aligned} x = \cos^4 t \\ y = \sin^4 t \end{aligned}$$

方程式は次のようになる。

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

したがって、問いで与えられた方程式は変数変換で形を変えないことが分かる。求める面積は次のようになる。

$$S = \int_0^1 y dx$$

x, y を t で置換する。

$$x = 0, \cos^4 t = 0 \to t = \frac{\pi}{2}$$
$$x = 1, \cos^4 t = 1 \to t = 0$$
$$dx = -4\cos^3 t \sin t dt$$

積分を求める。

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y dx \\ &= -4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 t \cos^3 t \sin t dt \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t \cos^3 t dt \end{aligned}$$

$\sin t = X$ と置換すると $\cos t dt = dX, 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2} \to 0 \leq X \leq 1$ となる。積分を求める。

$$\begin{aligned} S &= 4\int_0^1 X^5(1 - X^2)dX \\ &= 4\left[\frac{1}{6}X^6 - \frac{1}{8}X^8\right]_0^1 \\ &= 4\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

3.2

x, y の積分を θ の積分で表す。

$$\begin{cases} x = \cos^4 \theta \\ y = \sin^4 \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = 4\sin^3 \theta \cos \theta d\theta \\ dy = -4\cos^3 \theta \sin \theta d\theta \end{cases}$$

積分を求める。

$$\int_C (xdy - ydx) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \sin^3 \theta d\theta + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \cos^3 \theta d\theta$$

第一項を求める。$\cos \theta = X$ と置換する。$-\sin \theta d\theta = dX, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \to 0 \leq X \leq \quad 1$ となる。

$$\begin{aligned} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \sin^3 \theta d\theta &= 4\int_0^1 (X^5 - X^7)dX \\ 4\left[\frac{1}{6}X^6 - \frac{1}{8}X^8\right]_0^1 & \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

第二項は 3.1 で求められている。したがって、求める積分は次のようになる。

$$\int_c (xdy - ydx) = \frac{1}{3}$$

4 問題

曲線 $C : y = f(x)$ を求めるために次の問題を解け。

1. $P(x_0, y_0)$ における接線方程式を求めよ。
2. N の座標を求めよ。ただし、N は接線の切片である。
3. 原点を O として、$NP = OP$ を満たす微分方程式を求めよ。
4. 3. の方程式が同次系であることを利用し、方程式を変形せよ。
5. 変形した方程式を解け。
6. 曲線 C を求めよ。

4.1

接線の点 $P(x_0, y_0)$ における傾きは、$f'(x_0)$ である。したがって接線方程式は、

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

となる。

4.2

$x = 0$ の時の y を求める。

$$\begin{aligned} y &= f'(x_0)(-x_0) + y_0 \\ &= y_0 - f'(x_0)x_0 \end{aligned}$$

したがって、切片の座標は、

$$N(0, y_0 - f'(x_0)x_0)$$

となる。

4.3

ON, NP を表す。

$$\begin{aligned} ON &= y_0 - f'(x_0)x_0 \\ NP^2 &= x_0^2 + (-x_0 f'(x_0))^2 \\ &= x_0^2 + \left\{x_0 f'(x_0)\right\}^2 \end{aligned}$$

$ON^2 = NP^2$ を満たす式を求める。

$$\begin{aligned} y_0^2 + \left\{x_0 f'(x_0)\right\}^2 - 2x_0 y_0 f'(x_0) &= x_0^2 + \left\{x_0 f'(x_0)\right\}^2 \\ y_0^2 - 2x_0 y_0 f'(x_0) - x_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

接点の座標を $(x_0, y_0) \to (x, y)$ と表す。すると $f'(x_0) \to y'$ と表される。したがって、曲線は次式を満たす。

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0$$

4.4

x^2 で割り、同次系に書き換える。

$$2\frac{y}{x}y' + 1 - (\frac{y}{x})^2 = 0$$

$\frac{y}{x} = z$ と置く。$y' = (xz)' = z + xz'$ となるので、方程式は z, x で表される。

$$\begin{aligned} 2z(z + xz') + 1 - z^2 &= 0 \\ 2z^2 + 2xzz' + 1 - z^2 &= 0 \\ 2xzz' + z^2 + 1 &= 0 \\ \frac{dz}{dx} = -\frac{z^2+1}{2z} \cdot \frac{1}{x} & \end{aligned}$$

4.5

$$\begin{aligned} \frac{2z}{z^2+1}dz &= -\frac{1}{x}dx \\ \ln(z^2+1) &= -\ln|x| + C \\ \ln\left\{x(z^2+1)\right\} &= C \\ x(z^2+1) = C & \\ z^2 + 1 = \frac{C}{x} & \end{aligned}$$

4.6

$z = \frac{y}{x}$ を代入する。

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{C}{x}$$

曲線は $P(x_0, y_0)$ を通るので、積分定数 C が定まる。

$$\begin{aligned} \frac{y_0^2}{x_0^2} + 1 &= \frac{C}{x_0} \\ &\to \quad C = \frac{y_0^2}{x_0} \end{aligned}$$

式を変形する。

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 &= xC \\ y^2 + x^2 - xC &= 0 \\ y^2 + \left(x - \frac{1}{2}C\right)^2 &= \left(\frac{C}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

これは、中心 $\left(\frac{1}{2}C, 0\right)$、半径 $\frac{C}{2}$ の円を示す。C は曲線の通る点により決まる定数である。