九州大学工学部平成 12 年度編入学試験問題 数学

1

次の問いに答えよ。

1. z を複素数とし、複素平面状の閉曲線 C を $|z-a|=r \quad$ (r は正の実数、a は複素数) とする。このとき積分

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}$$

を $n=1, n=2, n=3$ の各々の場合について計算せよ。ただし、一周積分は正の向きとする。

2. 上の結果を用いて、$\displaystyle\oint_C \frac{3z^2-4z}{(z-1)^3}dz$ を計算せよ。ただし、C は $|z-1|=2$ である。

1.1

積分路は次のように表される。

$$C: z(t) = \quad re^{it}+a \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$\dfrac{dz}{dt}=ire^{it}$ から、積分を t で表す。

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n e^{int}} ire^{it} dt \\ &= \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt\end{aligned}$$

$n=1$ の場合

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{dz}{z-a} &= i\int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi i\end{aligned}$$

$n=2$ の場合

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{dz}{(z-a)^2} &= \frac{i}{r}\int_0^{2\pi} e^{-it} dt \\ &= \frac{i}{r}\cdot\frac{1}{(-i)}\left[e^{-it}\right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{1}{r}(1-1) \\ &= 0\end{aligned}$$

$n=3$ の場合

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{dz}{(z-a)^3} &= \frac{i}{r^3}\int_0^{2\pi} e^{2it} dt \\ &= \frac{i}{r^2}\cdot\frac{1}{(-2i)}\left[e^{-2it}\right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{1}{2r^2}(1-1) \\ &= 0\end{aligned}$$

1.2

積分路は次のように表される。

$$C : z(t) = \quad 2\mathrm{e}^{it} + 1 \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

被積分関数を部分分数に分解する。その場合の係数をそれぞれ A, B, C とする。

$$\frac{3z^2 - 4z}{(z-1)^3} = \frac{A}{(z-1)^3} + \frac{B}{(z-1)^2}\frac{C}{(z-1)}$$

係数はそれぞれの留数を求めればよい。

$$\begin{aligned}
A &= \left[3z^2 - 4z\right]_{z=1} = -1 \\
B &= \frac{d}{dz}\left[3z^2 - 4z\right]_{z=1} = [6z-4]_{z=1} = 2 \\
C &= \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left[3z^2 - 4z\right]_{z=1} = \frac{6}{2} = 3
\end{aligned}$$

1.1 の結果から積分を求める。

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{3z^2 - 4z}{(z^1)^3} dz &= \oint_C \frac{-1}{(z-1)^3} dz + \oint_C \frac{2}{(z-1)^2} dz + \oint_C \frac{3}{z-1} dz \\
&= 0 + 0 + 3 \cdot 2\pi i \\
&= 6\pi i
\end{aligned}$$

2

xy 平面状の点 (x, y) と uv 平面状の点 (u, v) との間に

$$u = \mathrm{e}^x \cos y, v = \mathrm{e}^y \sin y$$

という対応関係がある。このとき、xy 平面状の 3 点 $A(0,0), B(1,0), C(1,\frac{\pi}{2})$ を頂点とする三角形 ABC を、上の対応関係によって uv 平面状に移した図形を P として、次の問いに答えよ。

1. 図形 P がどのような図形であるかを示せ。
2. 図形 P の面積を求めよ。

2.1

点 A, B, C を uv 平面で表す。

$$\begin{aligned}
A : (x, y) &= (0, 0) \\
\to (u, v) &= (\mathrm{e}^0 \cos 0, \mathrm{e}^0 \sin 0) \\
&= (1, 0) \\
B : (x, y) &= (1, 0) \\
\to (u, v) &= (\mathrm{e} \cos 0, \mathrm{e} \sin 0) \\
&= (e, 0) \\
A : (x, y) &= (1, \frac{\pi}{2}) \\
\to (u, v) &= (\mathrm{e} \cos \frac{\pi}{2}, \mathrm{e} \sin \frac{\pi}{2}) \\
&= (0, e)
\end{aligned}$$

$A \to B$ の変化について、$y = 0$ は一定である。したがって u, v は次のようになる。

$$\begin{aligned}
u &= \mathrm{e}^x \cos 0 = \mathrm{e}^x \\
v &= \mathrm{e}^x \sin 0 = 0
\end{aligned}$$

したがって uv 平面では実軸上の変化になる。
$B \to C$ の変化について、$x = 1$ で一定である。

$$\begin{aligned}
u &= \mathrm{e} \cos y \\
v &= \mathrm{e} \sin y \\
\to u^2 + v^2 &= \mathrm{e}^2
\end{aligned}$$

uv 平面で中心 0、半径 e の円を示す。
$C \to A$ の変化について、$y = \dfrac{\pi}{2} x$ の関係がある。

$$u^2 + v^2 = \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{\frac{4y}{\pi}}$$

これは、半径を少しづつ変化させる円を示す。
また、$z = x + iy, w = e^z = u + iv$ とすると w は次のようになる。

$$\begin{aligned}
w &= u + iv \\
&= \mathrm{e}^{x+iy} \\
&= \mathrm{e}^x (\cos y + i \sin y) \\
&= \mathrm{e}^x \cos y + i \mathrm{e}^x \sin y
\end{aligned}$$

w は正則関数であるから、xy と uv には等角性が成り立ち、xy 平面の角 A, C は uv 平面でも同じ大きさになる。

2.2

$C \to A$ 　までの形状をしめす関数を $u = f(v)$ と表す。面積は、円の面積から v と $f(v)$ の作る図形の面積を引いた値になる。

$$S = \frac{\pi e^2}{4} - \int_0^e f(v)dv$$

$\int_0^e f(v)dv$ を求める。$C \to A$ について、$y = \frac{\pi}{2}x$ の関係がある。したがって、関数 $f(v)$ は次のようになる。

$$f(v) = u = e^x \cos\frac{\pi}{2}x$$
$$v = e^x \sin\frac{\pi}{2}x$$

これは、x を媒介変数とした関数表示である。x の積分で表す。
範囲

$$v = 0 \to e^x \sin\frac{\pi}{2}x = 0 \to x = 0$$
$$v = e \to e^x \sin\frac{\pi}{2}x = 1 \to x = 1$$

$$dv = \frac{dv}{dx}dx = (e^x \sin\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}e^x \cos\frac{\pi}{2}x)dx$$

積分を計算する。

$$\begin{aligned}\int f(v)dv &= \int_0^1 e^x \cos\frac{\pi}{2}x(e^x \sin\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}e^x \cos\frac{\pi}{2}x)dx \\ &= \int_0^1 e^{2x}(\cos\frac{\pi}{2}x \sin\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}e^x \cos^2\frac{\pi}{2}x)dx\end{aligned}$$

項別積分する。
第一項目

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{2x}\cos\frac{\pi}{2}x \sin\frac{\pi}{2}x dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\sin\pi x dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{1+\pi^2}(2\sin\pi x - \pi\cos\pi x)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi e^2}{4+\pi^2} + \frac{\pi}{4+\pi^2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2(4+\pi^2)}(e^2+1)\end{aligned}$$

第二項目

$$\int_0^1 \frac{\pi}{2}e^{2x}\cos^2\frac{\pi}{2}dx$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\pi}{2}\int_0^1 e^{2x}\frac{1+\cos\pi x}{2}dx \\ &= \frac{\pi}{4}\left\{\int_0^1 e^{2x}dx + \int_0^1 e^{2x}\cos\pi x dx\right\} \\ &= \frac{\pi}{4}\left\{\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 + \left[\frac{e^{2x}}{4+\pi^2}(\cos\pi x + \pi\sin\pi x)\right]_0^1\right\} \\ &= \frac{\pi}{8}(e^2-1) + \frac{\pi}{4}\left\{\frac{-2e^2}{4+\pi^2} - \frac{2}{4+\pi^2}\right\} \\ &= \frac{\pi}{8}(e^2-1) - \frac{\pi}{2(4+\pi^2)}(e^2+1)\end{aligned}$$

以上の結果から求める面積は次のようになる。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4}\pi \mathrm{e}^2 - \frac{\pi}{8}(\mathrm{e}^2 - 1) + \frac{\pi}{2(4+\pi^2)}(\mathrm{e}^2 + 1) - \frac{\pi}{2(4+\pi^2)}(\mathrm{e}^2 + 1) \\ &= \frac{\pi}{8}(\mathrm{e}^2 + 1) \end{aligned}$$

3

連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} &= -x(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} &= x(t) - ay(t) \end{cases}$$

に関して、以下の問いに答えよ。ただし、$x(0) = 1, y(0) = 0$ とし、a は正の定数とする。

1. $x(t)$ と $y(t)$ を求めよ。
2. $y(t)$ を最大にする t の値とその最大値を求めよ。

3.1

$x(t)$ を求める。

$$\frac{dx}{dt} = -x$$

一般解は積分定数を C_1 として、次のようになる。

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t}$$

初期値 $x(0) = 1$ から C_1 を定める。

$$x(0) = C_1 = 1$$

特殊解は次のようになる。

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t}$$

$y(t)$ を求める。$y(t)$ の式に $x(t)$ を代入する。

$$\frac{dy}{dt} + ay = \mathrm{e}^{-t}$$

同次解を求める。

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0$$

積分定数を C_2 として一般解は次のようになる。

$$y(t) = C_2 \mathrm{e}^{-at}$$

非同次解を求める。$a = 1, a \neq 1$ の場合に分けて考える。
$a \neq 1$ の場合非同次解を $y(t) = A\mathrm{e}^{-t}$ と仮定し、方程式に代入する。ただし A は定数とする。

$$\begin{aligned} (-A + at)\mathrm{e}^{-t} &= \mathrm{e}^{-t} \\ A &= \frac{1}{a-1} \end{aligned}$$

$a = 1$ の場合非同次解を $y(t) = u(t)\mathrm{e}^{-t}$ と仮定し方程式に代入する。

$$\begin{aligned} u'(t)\mathrm{e}^{-t} - u(t)\mathrm{e}^{-t} + u(t)\mathrm{e}^{-t} &= \mathrm{e}^{-t} \\ u'(t) &= 1 \\ u(t) &= t \end{aligned}$$

一般解は次のようになる。

$$y(t) = \begin{cases} C_2 \mathrm{e}^{-at} + \frac{1}{a-1}\mathrm{e}^{-t} & a \leq 1 \\ C_2 \mathrm{e}^{-t} + t\mathrm{e}^{-t} & a = 1 \end{cases}$$

初期値 $y(0) = 0$ を用いて、積分定数を求める。$a \neq 1$ の場合

$$y(0) = 0 = C_2 + \frac{1}{a-1} \to C_2 = -\frac{1}{a-1}$$

$a = 1$ の場合

$$y(0) = 0 = C_2$$

したがって特殊解は次のようになる。

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a-1}(1 - \mathrm{e}^{-at}) & a \neq 1 \\ t\mathrm{e}^{-t} & a = 1 \end{cases}$$

3.2

$a \leq 1$ の場合

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{a-1}(1 - \mathrm{e}^{-at}) \\ y(t) &= \frac{a}{a-1}\mathrm{e}^{-at} \end{aligned}$$

$y'(t) = 0$ となる t は存在しない。$0 < a < 1$ であれば、$y'(t) < 0$ であるので、$t \to -\infty$ で最大値をとる。

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{a}{a-1}\mathrm{e}^{-at} = -\infty$$

$a > 1$ であれば、$y'(t) > 0$ であるから、$t \to \infty$ で最大値をとる。

$$\lim_{t \to \infty} \frac{a}{a-1}\mathrm{e}^{-at} = \frac{1}{a-1}$$

$a = 1$ の場合

$$\begin{aligned} y(t) &= t\mathrm{e}^{-t} \\ y'(t) &= \mathrm{e}^{-t} - t\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

$y'(t) = 0$ となる t は次のようになる。

$$\begin{aligned} y'(t) = 0 = \mathrm{e}^{-t}(1 - t) \\ t = 1 \end{aligned}$$

y の 2 階微分を求め、この時に極大か極小かを求める。

$$\begin{aligned} y''(t) &= -\mathrm{e}^{-t}(1 - t) - \mathrm{e}^{-t} \\ &= -\mathrm{e}^{-t}(2 - t) \end{aligned}$$

$t = 1$ を代入する。

$$y''(1) = -\mathrm{e}^{-1} < 0$$

したがって、$y(t)$ は $t = 1$ で極大値をとる。また、$t < 1$ で $y'(t) > 0$ で単調増加、$t > 1$ で $y'(t) < 0$ 単調現象であり、$y(1)$ が最大値である。

$$y(1) = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

4

1 つのサイコロを続けて振るとき、以下の問いに答えよ。

1. k 回目に初めて 1 の目の出る確率 $p_k(k=1,2,3,\cdots)$ を求めよ。また $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k$ を求めよ。
2. k 回目に 2 止めの 1 の目の出る確率 $q_k(k=2,3,\cdots)$ を求めよ。

4.1

1 の目の出る確率

$$\frac{1}{6}$$

その他の目の出る確率

$$\frac{5}{6}$$

一回目

$$\frac{1}{6}$$

二回目

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$$

三回目

$$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

同様に k 回目では、次のようになる。

$$p_k=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}kp_k=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

を考える。以下の式を考える。

$$x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \tag{4.1}$$

式 4.1 は、$|x|<1$ において以下の収束値を持つ。

$$\frac{x}{1-x} \tag{4.2}$$

式 4.2 を微分すると以下のようになる。

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots \quad = \quad \frac{1}{(1-x)^2}$$

$x=\dfrac{5}{6}$ とすると次のようになる。

$$1+2\cdot\frac{5}{6}+3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots \quad = \quad \frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2}=36$$

したがって、求める収束値は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} &= \frac{36}{6}\\ &= 6\end{aligned}$$

4.2

二回目

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} \tag{4.3}$$

三回目

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} \tag{4.4}$$

かつ $\frac{5}{6}$ のとり方が ${}_2C_1$ 通りである。
四回目

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} \tag{4.5}$$

かつ $\frac{5}{6}$ のとり方が ${}_3C_2$ 通りである。
同様に考えて次の結果を得る。

$$p_k = {}_{k-1}C_{k-2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}$$