九州大学工学部平成14年度編入学試験問題 数学

1 問題

曲線 $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ に関して以下の問いに答えよ。

1. $y = f(x)$ の増減を調べて、グラフを書け。
2. 区間 $[\alpha, \alpha+1]$ の曲線の長さ $h(\alpha)$ を求めよ。
3. $h(\alpha)$ の最小値を求めよ。

1.1

$f(x)$ を微分し、$f(x)$ の増減表を書く。

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$f'(x) = 0$ となる x(極値をとり得る x) を求める。

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^{-x} \\ &\rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

2 階微分を求める。

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

増減表は以下のようになる。

Table 1.1: 増減表

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

$f''(x) > 0$ より $f(x)$ は下に凸である。

1.2

$f(x)$ の作る曲線の長さは次式で与えられる。

$$h(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+1} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

$f(x)$ を代入し、長さを α の関数として求める。

$$\begin{aligned}
h(\alpha) &= \int_{\alpha}^{\alpha+1} \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+1} \sqrt{4+\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+1} \sqrt{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+1} (\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x}\right]_{\alpha}^{\alpha+1} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^{\alpha+1}-\mathrm{e}^{-(\alpha+1)}\right\}-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\alpha}-\mathrm{e}^{-\alpha}) \\
&= \sinh(\alpha+1)-\sinh\alpha
\end{aligned}$$

1.3

$h(\alpha)$ を α で微分し、極値をとり得る点を求める。

$$\begin{aligned}
h'(\alpha) &= \cosh(\alpha+1)-\cosh(\alpha) \\
&= 0 \\
&\rightarrow \cosh(\alpha)=\cosh(\alpha)
\end{aligned}$$

cosh は週関数であるから、次の方程式を満たす α を求めればよい。

$$\alpha+1=\pm\alpha$$
$$\rightarrow \quad \alpha=-\frac{1}{2}$$

$h(\alpha)$ の増減表を示す。

Table 1.2: $h(\alpha)$ の増減表

α	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$h'(\alpha)$	$-$	0	$+$
$h(\alpha)$	$\searrow$		$\nearrow$

$\alpha=-\frac{1}{2}$ で $h(\alpha)$ は最小値をとることが分かる。その値は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
h(-\frac{1}{2}) &= \sinh(-\frac{1}{2}+1)-\sinh(-\frac{1}{2}) \\
&= 2\sinh(\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

2 問題

次の連立微分方程式がある。

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} &= y(t) - t^2 - 4 \\ \dfrac{dy(t)}{dt} &= -x(t) - t^2 \end{cases}$$

ただし、$x(1) = -1, y(1) = 1$ である。

1. 上の微分方程式から $x(t)$ に関する微分方程式を導け。
2. $x(t), y(t)$ を求めよ。

2.1

$\dfrac{dy}{dt} = \dot{y}, \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$ と表す。

$$\dot{x} = y - t^2 - 4 \tag{2.1}$$
$$\dot{y} = -x - t^2 \tag{2.2}$$

式 2.1 を y について解き、$\dot{y}$ を求める。

$$y = \dot{x} + t^2 + 4$$
$$\dot{y} = x\ddot{x} + 2t$$

式 2.2 に代入する。

$$\ddot{x} + 2t = -x - t^2$$
$$\ddot{x} + x = -2t - t^2$$

2.2

x の方程式を解く。
同次方程式の解を求める。

$$\ddot{x} + x = 0$$

積分定数を C_1, C_2 とする。解は次のようになる。

$$x = C_1 \sin t + C_2 \cos t$$

非同次解を求める。

$$\ddot{x} + x = -t^2 - 2t$$

右辺の関数形から、定数を A, B, C として、解を次のように仮定する。

$$x = At^2 + Bt + C$$

方程式に代入する。

$$2A + At^2 + Bt + C = -t^2 - 2t$$
$$A = -1, B = 2, 2A + C = 0$$
$$C = -2A = 2$$

非同時解は次のようになる。

$$x = -t^2 - 2t + 2$$

以上より一般解は次のようになる。

$$x = C_1 \sin t + C_2 \cos t - t^2 - 2t - 2$$

y を求める。求めた x を代入する。

$$\begin{aligned} y &= \dot{x} + t^2 + 4 \\ &= C_1 \cos t - C_2 \sin t - 2t - 2 + t^2 + 4 \\ &= C_1 \cos t - C_2 \sin t + t^2 - 2t + 2 \end{aligned}$$

積分定数を求める。初期条件はつぎのように定められている。

$$\begin{cases} x(1) = -1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

解に代入する。

$$\begin{cases} x(1) = -1 = C_1 \sin 1 + C_2 \cos 1 - 4 \\ y(1) = 1 = C_1 \cos 1 - C_2 \sin 1 + 1 \end{cases}$$

行列で表す。

$$\begin{pmatrix} \sin 1 & \cos 1 \\ \cos 1 - \sin 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

クラメールの公式から解くと以下のようになる。

$$C_1 = -\begin{pmatrix} 4 & \cos 1 \\ 0 & -\sin 1 \end{pmatrix} = 4 \sin 1$$

$$C_2 = -\begin{pmatrix} \sin 1 & 4 \\ \cos 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 \cos 1$$

特殊解は以下のようになる。

$$\begin{aligned} x &= 4 \sin 1 \sin t + 4 \cos 1 \cos t - t^2 - 2t - 2 \\ &= 4 \cos(t - 1) - t^2 - 2t - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 4 \sin 1 \cos t - 4 \cos 1 \sin t + t^2 - 2t + 2 \\ &= 4 \sin(1 - t) + t^2 - 2t + 2 \end{aligned}$$

3 問題

値ぶれていない四面体には、4 つの頂点がある。各頂点の座標を $(x_i, y_i, z_i)(1 \leq i \leq 4)$ とする。四面体内の任意の点 P の座標を (x, y, z) で表すとき、

$$u(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \tag{3.1}$$

で表される関数 $u(x,y,z)$ を考える。ただし $\alpha_i(1 \leq i \leq 4)$ は定数である。このとき、次の問いに答えよ。

1. 4 個の頂点における関数値 $u_i(1 \leq i \leq 4)$ を既知とするとき、$\alpha_i(1 \leq i \leq 4)$ を決定する連立 1 次方程式を求めよ。

2. 1 で求めた連立 1 次方程式で $\alpha_i(1 \leq i \leq 4)$ を求め、それを式 2.1 に代入した結果を

$$u(x,y,z) = \sum_{i=1}^{4} L_i(x,y,z) u_i \tag{3.2}$$

と表す。ただし、$L_i(x,y,z)$ は次式で与えられる。

$$L_i(x,y,z) = a_i + b_i x + c_i y + d_i z \tag{3.3}$$

- $L_i(x,y,z)(1 \leq i \leq 4)$ の各頂点における関数値を示せ。
- $L_i(x,y,z)(1 \leq i \leq 4)$ の四面体の 6 個の偏の書く中天における関数値を求めよ。
- 式 3.3 の a_i, b_i, c_i, d_i を以下の 5 個の行列式を用いて表現せよ。その際 i が 1 から 4 まで動いたときの j, k, l のとる値を明示せよ。

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}, \boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

3.1

$u_i(x_i, y_i, z_i)(1 \leq i \leq 4)$ について、次式が成り立つ。

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i$$

したがって、4 個の頂点は次のように表される。

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 z_1 \\ u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 + \alpha_4 z_2 \\ u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 z_3 \\ u_4 = \alpha_1 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 y_4 + \alpha_4 z_4 \end{cases}$$

3.2

1. ある座標は次のように表される。

$$u = L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3 + L_4 u_4$$

各頂点では、$u = u_i(1 \leq i \leq 4)$ であるから、頂点の座標は次のようになる。

$$\begin{aligned} u_1 : (L_1, L_2, L_3, L_4) &= (1,0,0,0) \\ u_2 : (L_1, L_2, L_3, L_4) &= (0,1,0,0) \\ u_3 : (L_1, L_2, L_3, L_4) &= (0,0,1,0) \\ u_4 : (L_1, L_2, L_3, L_4) &= (0,0,0,1) \end{aligned}$$

2. 頂点の座標 (x_i, y_i, z_i) をベクトル $\boldsymbol{x_i}$ で表す。もう一つの頂点を $\boldsymbol{x_j}$ と表す。このとき、中点 $\boldsymbol{x_{ij}}$ は次のように表される。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x_{ij}} &= \boldsymbol{x_i} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x_j} - \boldsymbol{x_i}\ ) \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{x_i} + \boldsymbol{x_j})\end{aligned}$$

$\boldsymbol{x_{ij}}$ の座標を (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) とし、関数値を求める。

$$\begin{aligned}u_{ij} &= \alpha_1 + \alpha_2 x_{ij} + \alpha_3 y_{ij} + \alpha_4 z_{ij} \\ &= \alpha_1 + \frac{\alpha_2(x_i + x_j)}{2} + \frac{\alpha_3(y_i + y_j)}{2} + \frac{\alpha_4(z_i + z_j)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(u_i + u_j)\end{aligned}$$

2 頂点 u_i, u_j の中点を $u_{ij}(i \neq j)$ とすると、中天の座標は次のようになる。

$$\begin{aligned}u_{12} : (L_1, L_2, L_3, L_4) &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0) \\ u_{13} : (L_1, L_2, L_3, L_4) &= (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0) \\ u_{14} : (L_1, L_2, L_3, L_4) &= (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}) \\ u_{23} : (L_1, L_2, L_3, L_4) &= (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \\ u_{24} : (L_1, L_2, L_3, L_4) &= (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) \\ u_{34} : (L_1, L_2, L_3, L_4) &= (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\end{aligned}$$

3. 今までの式をまとめる。
式 3.3

$$L_i = a_i + b_i x + c_i y + d_i z$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ を求める式

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

式 3.2

$$u = L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3 + L_4 u_4$$

式 3.1

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z$$

求める係数をまとめると次のように表すことができる。

a_i : α_1 の u_i を含む項の係数
b_i : α_2 の u_i を含む項の係数
c_i : α_3 の u_i を含む項の係数
d_i : α_4 の u_i を含む項の係数

α_1 から α_4 はクラメールの公式により求められる。そのうち u_i のみをくくり出す。

$$a_i = \frac{A}{E}, b_i = \frac{B}{E}, c_i = \frac{C}{E}, d_i = \frac{D}{E}$$

$ijkl$ のとり方は次のようになる。

i	j	k	l
1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

4 問題

?