九州大学工学部平成 10 年度編入学試験問題 数学

1 問題

正則行列 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{bmatrix}$ について以下の各問いに答えよ。

1. 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A^{-1}}$ の $(2,3)$ 要素を求めよ。
2. 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ。
3. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \\ 0 & 2i & 0 \end{bmatrix}$ を満たす a, b, c の各値を求めよ。ただし、i は虚数単位を表す。
4. $\boldsymbol{A^n}(2,2)+$ $\boldsymbol{A^n}(3,2)$ を n, b, c を用いて表せ。ただし、$\boldsymbol{A^n}(i,j)$ は行列 $\boldsymbol{A^n}$ の (i,j) 要素を表し、n は 1 以上の整数とする。

1.1

行列式を求める。

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{vmatrix} \\
&= ab^2 - ac^2 \\
&= a(b^2 - c^2)
\end{aligned}
$$

余因子を求め、逆行列の $(2,3)$ 成分を求める。これを $\boldsymbol{A^{-1}_{23}}$ と表す。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A^{-1}_{23}} &= \frac{-1}{|\boldsymbol{A}|} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} \\
&= -\frac{ac}{a(b^2 - c^2)} \\
&= -\frac{c}{c^2 - b^2}
\end{aligned}
$$

1.2

固有方程式を立て固有値を求める。

$$
\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b-\lambda & c \\ 0 & c & b-\lambda \end{vmatrix} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
(a-\lambda)\left\{(b-\lambda)^2 - c^2\right\} &= 0 \\
(a-\lambda)(b-\lambda-c)(b-\lambda+c) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\lambda = a, b-c, b+c
$$

固有値は $a, b-c, b+c$ である。

1.3

$\boldsymbol{A^2}$ を求める。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2+c^2 & 2bc \\ 0 & 2bc & b^2+c^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \\ 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

各成分の釣り合いから、次の方程式が成り立つ。

$$a-2=4 \rightarrow a=\pm 2$$

$$\begin{cases} b^2+c^2 = 0 \\ 2bc = 2i \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=\pm 1, c=\pm i \\ b=\pm i, c=\pm 1 \end{cases}$$

したがって、$a=\pm 2, (b,c)=(\pm 1, \pm i), (b,c)=(\pm i, \pm 1)$(複合同順) となる。

1.4

固有ベクトルを求め、行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化する。$\lambda = a$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & c \\ 0 & c & b-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = b-c$ のとき

$$\begin{pmatrix} a-b+c & 0 & 0 \\ 0 & c & c \\ 0 & c & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$c \neq 0$ の場合は

$$\boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = b+c$ のとき

$$\begin{pmatrix} a-b-c & 0 & 0 \\ 0 & -c & c \\ 0 & c & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$c \neq 0$ の場合は

$$\boldsymbol{x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

　対角化行列 $\boldsymbol{P}$ を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} &= (\boldsymbol{x_1 x_2 x_3}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

とすると、その逆行列 $\boldsymbol{P^{-1}}$ は

$$\boldsymbol{P^{-1}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。
　行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化すると

$$\boldsymbol{P^{-1}AP} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b-c & 0 \\ 0 & 0 & b+c \end{pmatrix}$$

となる。さらに、対角行列を n 乗し、$\boldsymbol{A^n}$ を求める。

$$\boldsymbol{(P^{-1}AP)^n} = \boldsymbol{P^{-1}A^nP} = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & (b-c)^n & 0 \\ 0 & 0 & (b+c)^n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^n} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & (b-c)^n & 0 \\ 0 & 0 & (b+c)^n \end{pmatrix}\boldsymbol{P^{-1}}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A^n} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & (b-c)^n & 0 \\ 0 & 0 & (b+c)^n \end{pmatrix}\boldsymbol{P^{-1}} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & (b-c)^n & (b+c)^n \\ 0 & -(b-c)^n & (b+c)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a^n & 0 & 0 \\ 0 & (b-c)^n+(b+c)^n & (b+c)^n-(b-c)^n \\ 0 & (b+c)^n+(b-c)^n & (b-c)^n+(b+c)^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A^n}(2,2)+$ $\boldsymbol{A^n}(3,2)$ を求める。

$$\frac{1}{2}\left\{(b-c)^n+(b+c)^n+(b+c)^n-(b-c)^n\right\} = \frac{1}{2}\left\{2(b+c)^n\right\} = (b+c)^n$$

　$c=0$ の場合は固有値が、a, b となる。b に対する固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

対角化行列 $\boldsymbol{P}$ は

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化し、$\boldsymbol{A}$ を求める。

$$\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A^n} &= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}\boldsymbol{P^{-1}} \\ &= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A^n}(2,2)+$ $\boldsymbol{A^n}(3,2)$ を求めと、

$$b^n + 0 = b^n$$

となる。したがって、a, b, c の取り方によらず、求める値は

$$(b+c)^n$$

と表される。

2 問題

次の各問いに答えよ。

1. $z(t)$ に対する微分方程式、$\dfrac{d^2z}{dt^2}+mz=0$ の一般解を求めよ。ただし、m は正の定数とする。

2. 連立微分方程式 $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+2x-y=0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}-x+2y=0 \end{cases}$ を求めたい。そのため、この微分方程式に一次変換 $\begin{cases} x=x_1+x_2 \\ y=ax_1+bx_2 \end{cases}$ を施す。x_1 に関する方程式が x_2 を含まないように、また x_2 に関する方程式が x_1 を含まないようにするための a,b の値を求めよ。ただし、$a\neq b$ とする。

3. x_1,x_2 の一般解を用いて、初期設定 $t=0$ で、$x=2,\dfrac{dx}{dt}=0,y=0,\dfrac{dy}{dt}=0$ のときの解 x,y を求めよ。

2.1

$$\frac{d^2z}{dt^2}+mz=0$$

解を、$z\propto e^{\lambda t}$ と仮定すると、特性方程式は

$$\begin{aligned} \lambda^2+m &= 0 \\ \lambda &= \pm\sqrt{m}i \end{aligned}$$

となる。積分定数を C_1,C_2 として、一般解は、

$$z(t)=C_1\sin\sqrt{m}t+C_2\cos\sqrt{m}t$$

となる。

2.2

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+2x-y=0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}-x+2y=0 \end{cases}$$

$x=x_1+x_2,y=ax_1+bx_2$ を代入する。

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2}+\dfrac{d^2x_2}{dt\ 2}+2x_1+2x_2-ax_1+bx_2=0 \\ a\dfrac{d^2x_1}{dt^2}+b\dfrac{d^2x_2}{dt^2}-x_1-x_2+2ax_1+2bx_2=0 \end{cases}$$

和を取る。

$$(1+a)\frac{d^2x_1}{dt^2}+(1+b)\frac{d^2x_2}{dt^2}+(1+a)x_1+(1+b)x_2=0$$

差を取る。

$$(1-a)\frac{d^2x_1}{dt^2}+(1-b)\frac{d^2x_2}{dt^2}+3(1-a)x_1+3(1-b)x_2=0$$

これらの方程式が、x_1,x_2 を独立して含むための条件は、

$$a=-1,b=1$$

または

$$a=1,b=-1$$

となる。

2.3

$a=-1, b=1$ の場合の変換により得られる方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2}+3x_1 = 0 \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2}+x_2 = 0 \end{cases}$$

これらは、それぞれ独立な常微分方程式である。したがって、この解は、

$$\begin{cases} x_1 = A_1\sin\sqrt{3}t+B_1\cos\sqrt{3}t \\ x_2 = A_2\sin t+B_2\cos t \end{cases}$$

となる。ただし、A_1, A_2, B_1, B_2 は積分定数とする。

　したがって、連立方程式の一般解は、

$$\begin{cases} x = A_1\sin\sqrt{3}t+B_1\cos\sqrt{3}t+A_2\sin t+B_2\cos t \\ y = -A_1\sin\sqrt{3}t-B_1\cos\sqrt{3}t+A_2\sin t+B_2\cos t \end{cases}$$

となる。

　初期条件から、

$$\begin{cases} B_1+B_2 = 2 \\ -B_1+B_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}A_1+A_2 = 0 \\ -\sqrt{3}A_1+A_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ B_1 = 1 \\ B_2 = 1 \end{cases}$$

となる。

　したがって、解は、

$$\begin{cases} x = \cos\sqrt{3}t+\cos t \\ y = -\cos\sqrt{3}t+\cos t \end{cases}$$

となる。

　$a=1, b=-1$ の場合の変換により得られる方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2}+x_1 = 0 \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2}+3x_2 = 0 \end{cases}$$

これらは、それぞれ独立な常微分方程式である。したがって、この解は、

$$\begin{cases} x_1 = C_1\sin t+D_1\cos t \\ x_2 = C_2\sin\sqrt{3}t+D_2\cos\sqrt{3}t \end{cases}$$

となる。ただし、C_1, C_2, D_1, D_2 は積分定数とする。

　したがって、連立方程式の一般解は、

$$\begin{cases} x = C_2\sin\sqrt{3}t+D_2\cos\sqrt{3}t+C_1\sin t+D_1\cos t \\ y = -C_2\sin\sqrt{3}t-D_2\cos\sqrt{3}t+C_1\sin t+D_2\cos t \end{cases}$$

となる。これは、$a=-1, b=1$ の場合の一般解と同じであり、初期条件から得られる解は同じものとなる。

　したがって、解は、

$$\begin{cases} x = \cos\sqrt{3}t+\cos t \\ y = -\cos\sqrt{3}t+\cos t \end{cases}$$

となる。

　このように、変数変換の係数はどちらの場合も同じ解が得られることが分かる。

3 問題

次の各問いに答えよ。

1. $f(x,y)$ は 2 回偏微分可能な関数とし、$f_y \neq 0$ となる点の近くで、$f(x,y)=0$ により定義される関数を $y=\phi(x)$ とする。このとき、
   (a) $\phi'(x)$ を f_x, f_y を用いて表せ。
   (b) $\phi'(x)=0$ となる点での $\phi''(x)$ を f の 2 階までの偏微分を用いて表せ。
2. 曲線 $C: f(x,y)=xy+y^2-x^3=0$ 上の $f_y \neq 0$ となる部分における関数 y の極値を求め、極大か極小かを判定せよ。

3.1

3.1.1

$f(x,y)=0$ の変数 y は x の関数として $y=\phi(x)$ で与えられている。そこで、$f(x,y)=f(x,\phi(x))=0$ と表し、$f(x,\phi(x))=0$ を x で微分する。

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= f_x\tfrac{dx}{dx}+f_y\tfrac{dy}{dx}\\ &= f_x+f_y\phi'(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

これより、$\phi'(x)$ は次のようになる。

$$\phi'(x)=-\frac{f_x}{f_y}$$

3.1.2

$\phi'(x)$ を x で微分する。

$$\begin{aligned}\frac{d\phi'(x)}{dx} &= -\frac{d}{dx}\left(\frac{f_x}{f_y}\right)\\ &= -\frac{1}{f_y^2}\left\{\frac{d}{dx}(f_x)\cdot f_y - f_x\frac{d}{dx}(f_y)\right\}\\ &= -\frac{1}{f_y^2}\left\{f_{xx}f_y - fxf_{yy}\frac{dy}{dx}\right\}\end{aligned}$$

$\dfrac{dy}{dx}=\phi'(x)=0$ の条件を代入する。

$$\frac{d\phi'(x)}{dx}=-\frac{f_{xx}f_y}{f_y^2}=-\frac{f_{xx}}{f_y}$$

3.2

3.1 より、$\phi(x)$ の 1 階、2 階微分を求める。
1 階微分

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= -\frac{f_x}{f_y}\\ &= -\frac{y-3x^2}{x+2y}\end{aligned}$$

2 階微分

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= -\frac{-6x}{x+2y}\\ &= \frac{6x}{x+2y}\end{aligned}$$

次に、極値を取りうる点を求める。

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= 0 \\ &\to y = 3x^2\end{aligned}$$

$f(x,y)=0$ の式に代入する。

$$\begin{aligned}x\cdot(3x^2)+(3x^2)^2-x^3 &= 0 \\ 3x^3+9x^4-x^3 &= 0 \\ 9x^4+2x^3 &= 0 \\ x^3(9x+2) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=-\dfrac{2}{9}\end{cases}$$

y を求める。

$$x=0, y=0$$

$$x=-\frac{2}{9}, y=3\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2=\frac{4}{27}$$

$x=0,y=0$ は $f_y=0$ を満たす点であるので考えない。$x=-\dfrac{2}{9}, y=\dfrac{4}{27}$ を $\phi''(x)$ に代入し、極大であるか極小であるかを確かめる。

$$\begin{aligned}\phi''(x) &= \frac{6\cdot(-\frac{2}{9})}{-\frac{2}{9}+\frac{8}{27}} \\ &= \frac{-\frac{6}{3}}{-\frac{6}{27}+\frac{8}{27}} \\ &= -27\end{aligned}$$

$\phi''(x)<0$ であるから、$y=\phi(x)$ は $x=-\dfrac{2}{9}$ において極大値 $y=\dfrac{4}{27}$ をとる。

4 問題

次の各問いに答えよ。

1. 次の各問いに答えよ。
   (a) $z^4 + a^2 = 0$ を満たす複素数 z を求めよ。ただし、$a > 0$ とする。
   (b) 積分 $I = \int_C \frac{z^4}{1+z^4}dz$ の値を求めよ。ただし、C は図のような線分と半円をつないだ曲線であり、$R > 1$ とする。
2. $u(x,y) = x^2 + \alpha xy + \beta y^2$ とする。複素平面全体で正則関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が存在する条件を示し、そのときの $v(x,y)$ を求めよ。ただし、i は虚数単位とし、$z = x + iy$、また α, β は定数とする。

4.1

4.1.1

$z^4 + a^2 = 0$ を満たす z を求める。

$$z^4 = -a^2 = e^{\pi i}a^2$$

1 の 4 乗根は、$e^{\frac{\pi}{4}i}, e^{\frac{3\pi}{4}i}, e^{\frac{5\pi}{4}i}, e^{\frac{7\pi}{4}i}$ である。したがって、求める z は次の 4 つとなる。

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{a}e^{\pi i} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} &&= \sqrt{a}e^{\frac{5\pi}{4}i} \\ z_2 &= \sqrt{a}e^{\pi i} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i} &&= \sqrt{a}e^{\frac{7\pi}{4}i} \\ z_3 &= \sqrt{a}e^{\pi i} \cdot e^{\frac{5\pi}{4}i} &&= \sqrt{a}e^{\frac{9\pi}{4}i} \\ z_4 &= \sqrt{a}e^{\pi i} \cdot e^{\frac{7\pi}{4}i} &&= \sqrt{a}e^{\frac{11\pi}{4}i} \end{aligned}$$

4.1.2

積分 $I = \int_C \frac{z^4}{1+z^4}dz$ を求める。被積分関数を $f(z)$ と表す。

$$\mathrm{f}(z) = \frac{z^4}{1+z^4}$$

4.1 から、$f(z)$ の特異点は、$e^{\frac{\pi}{4}i}, e^{\frac{3\pi}{4}i}, e^{\frac{5\pi}{4}i}, e^{\frac{7\pi}{4}i}$ である。特異点のうち、閉曲線 C 内に含まれるものは、$e^{\frac{\pi}{4}i}, e^{\frac{3\pi}{4}i}$ である。
留数を求める。

$$\mathrm{Res}\left[f(z), e^{\frac{\pi}{4}i}\right] = \frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$\mathrm{Res}\left[f(z), e^{frac3\pi4i}\right] = \frac{1}{4}e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

留数定理から、積分値は次のようになる。

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \cdot \frac{1}{4}\left\{e^{\frac{\pi}{4}i} + e^{\frac{3\pi}{4}i}\right\} \\ &= \frac{\pi i}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} +\right\} \\ &= \frac{\pi i}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}i \\ &= -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

4.2

$$u(x,y) = x^2 + \alpha xy + \beta y^2$$

$f(z) = u + iv$ が正則であるとき、コーシーリーマンの関係式が成立する。

$$f'(z) = u_x + iv_x$$

$$f'(z) = -iu_y + v_y$$

$$\to \begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

それぞれの式を x, y で偏微分し、次の式を得る。次式が正則関数が存在する条件である。

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{xy} \\ v_{xy} = -u_{yy} \end{cases}$$

$$\to u_{xx} = -u_{yy}$$

$$\begin{cases} u_{xy} = -v_{xx} \\ v_{yy} = u_{xy} \end{cases}$$

$$\to v_{xx} = -v_{yy}$$

一方、与えられた $u(x,y)$ を偏微分する。

$$\begin{aligned} u_x &= 2x + \alpha y \\ u_{xx} &= 2 \\ u_y &= \alpha x + 2\beta y \\ u_{yy} &= 2\beta \end{aligned}$$

条件式から、β が定まる。

$$\beta = -1$$

また、コーシーリーマンの関係式から、次式が成り立つ。

$$v_x = -\alpha x + 2y$$

x で積分する。ただし $C(y)$ は x に対する積分定数である。

$$v = -\frac{1}{2}\alpha x^2 + 2xy + C(y)$$

v を y で偏微分すると、コーシーリーマンの関係式から、次式が成り立つ。

$$v_y = 2x + C'(y) = 2x + \alpha y$$

したがって、$C(y)$ は次のようになる。ただし、C は積分定数である。

$$\begin{aligned} C'(y) &= \alpha y \\ C(y) &= \frac{1}{2}\alpha y^2 + C \end{aligned}$$

以上より、v は次のようになる。

$$v(x,y) = -\frac{1}{2}\alpha x^2 + 2xy + \frac{1}{2}\alpha y^2 + C$$